UNIVERSITATEA TEHNICĂ DE CONSTRUCȚII
BUCUREȘTI

CATEDRA DE MATEMATICĂ

ALGEBRĂ LINIARĂ, GEOMETRIE ANALITICĂ ȘI DIFERENȚIALĂ

(culegere de probleme)

BUCUREȘTI
1997

Prezenta culegere de probleme a fost elaborată de un colectiv al Catedrei de Matematică, coordonator fiind conf. dr. Ghiocel GROZA. Autorii în ordinea capitolelor sunt:

conf. dr. Romică TRANDAFIR (capitolele I şi VII),
conf. dr. Nicolae DĂNEŢ şi conf. dr. Rodica Mihaela DĂNEŢ (capitolul II),
conf. dr. Angel POPESCU (capitolul III),
conf. dr. Ghiocel GROZA (capitolul IV),
asistentă Camelia GAVRILĂ şi conf. dr. Marinică GAVRILĂ (capitolul V),
lector Irina PANAIT (capitolul VI),
conf. dr. Iulian DRAGOTĂ (capitolele VIII şi XII),
lector Ştefania DONESCU (capitolul IX),
prep. Delia IONESCU (capitolul X),
lector Eugenia OPRESCU (capitolul XI),
prof. dr. Ştefan MITITELU (capitolul XII).

La baza acestei culegeri, ce acoperă în general programa analitică a cursului de algebră liniară, geometrie analitică şi diferenţială, a stat ediţia anterioară elaborată sub coordonarea conf. dr. Ioana BÂRZĂ.

Tehnoredactarea capitolelor I, II, III, IV, V, VII şi X a fost făcută de către autori iar a celorlalte capitole de către domnişoara Roxana Daniela BÂRZAN.

Catedra de matematică

CUPRINS

CAPITOLUL I

MATRICE. DETERMINANȚI. SISTEME DE ECUAȚII LINIARE

§ 1. MATRICE

1. Să se efectueze operațiile:

$$a)\begin{pmatrix}2&1&1\\3&1&0\\0&1&2\end{pmatrix}^2;\ b)\begin{pmatrix}2&1\\1&3\end{pmatrix}^3;\ c)\begin{pmatrix}3&2\\-4&-2\end{pmatrix}^5;\ d)\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}^n;$$

$$e)\begin{pmatrix}\cos\varphi&-\sin\varphi\\\sin\varphi&\cos\varphi\end{pmatrix}^n.$$

Răspuns: $a)\begin{pmatrix}7&4&4\\9&4&3\\3&3&4\end{pmatrix};\ b)\begin{pmatrix}15&20\\20&35\end{pmatrix};\ c)\begin{pmatrix}3&-2\\4&8\end{pmatrix};$

$$f)\begin{pmatrix}1&n\\0&1\end{pmatrix};\ e)\begin{pmatrix}\cos(n\varphi)&-\sin(n\varphi)\\\sin(n\varphi)&\cos(n\varphi)\end{pmatrix}.$$

2. Să se calculeze f(A) pentru:

a) $f(x)=x^2-x-1$ și $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\3&1&2\\1&-1&0\end{pmatrix}$;

b) $f(x)=x^2-5x+3$ și $A=\begin{pmatrix}2&-1\\-3&3\end{pmatrix}$;

c) $f(x)=x^2+2x+1$ și $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&1&2\\-1&4&1\end{pmatrix}$.

Răspuns: $a)\begin{pmatrix}5&1&3\\8&0&3\\-2&1&-2\end{pmatrix};\ b)\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix};\ c)\begin{pmatrix}3&4&4\\6&10&12\\4&16&11\end{pmatrix}.$

3. Fie $f(x)=x^2-4x+4$. Dacă $A=\begin{pmatrix}0 & a & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ să se determine a astfel încât:

$f(A)=\begin{pmatrix}3 & 4 & -1\\ -3 & 3 & -3\\ -3 & -1 & 1\end{pmatrix}$. *Răspuns*: $a=-1$.

4. Găsiţi toate matricele care comută cu matricea A:

a) $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -1\end{pmatrix}$; b) $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$; c) $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$

Răspuns: a) $X=\begin{pmatrix}x & 2y\\ -y & x-2y\end{pmatrix}=(x-y)I_2+yA$; b) $X=\begin{pmatrix}x & y\\ 0 & x\end{pmatrix}=(x-y)I_2+yA$;

c) $X=\begin{pmatrix}x & y & 0\\ u & v & 0\\ 3t-3x-u & t-3y-v & 2t\end{pmatrix}$.

5. Să se găsească matricea $X=\begin{pmatrix}x & y\\ -y & x\end{pmatrix}$, $x,y\in\mathbf{R}$, astfel încât: $X^2-4X+13I_2=0$.

Răspuns: $x=2$; $y=\pm 3$.

6. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}X - X\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$;

b) $X-\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$;

Răspuns: a) $X=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}7 & -1\\ -3 & -1\end{pmatrix}$; b) $X=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I_2$.

7. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases}3X-2Y=\begin{pmatrix}1 & 8 & -7\\ -2 & 3 & 4\\ 5 & 2 & 1\end{pmatrix}\\ 4X-Y=\begin{pmatrix}3 & 9 & -6\\ -1 & 4 & 7\\ 10 & 1 & 3\end{pmatrix}\end{cases}$$

Indicaţie: scăzând din prima ecuaţie pe cea de-a doua înmulţită cu 2 se obţine

matricea $X=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 2\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}$. Substituind pe X în cea de-a doua ecuaţie

găsim $Y=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 1 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}$.

8. Se numeşte *urma* unei matrice pătratice $A=(a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}}$, notată Tr(A), suma elementelor de pe diagonala principală, $Tr(A)=\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$. Să se arate că:

a) $Tr(A+B)=Tr(A)+Tr(B)$
b) $Tr(\alpha A)=\alpha Tr(A)$
c) $Tr(A\cdot B)=Tr(B\cdot A)$
d) $Tr(B\cdot A\cdot B^{-1})=Tr(A)$
oricare ar fi B matrice inversabilă.

9. Să se demonstreze că egalitatea $A.B-B.A=I$ este imposibilă (I find matricea unitate).

Indicaţie: se aplică exerciţiul 8 punctele a) şi c).

10. Demonstraţi că o matrice care comută cu o matrice diagonală, cu elementele diagonale distincte două câte două, este ea însăşi o matrice diagonală.

Indicaţie: Fie $A=\begin{pmatrix}a_1 & 0 & . & . & 0\\ 0 & a_2 & . & . & 0\\ . & . & . & . & .\\ 0 & 0 & . & . & a_n\end{pmatrix}$, $a_i\ne a_j$, $i\ne j$, $i,j\in\{1,2,\dots,n\}$.

$B=\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12} & . & . & b_{1n}\\ b_{21} & b_{22} & . & . & b_{2n}\\ . & . & . & . & .\\ b_{n1} & b_{n2} & . & . & b_{nn}\end{pmatrix}$. $C=A\cdot B=B\cdot A$.

Dar $A\cdot B=(a_i b_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}}$ şi $B\cdot A=(a_j b_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}}$, deci $c_{ij}=a_ib_{ij}=a_jb_{ij}\Rightarrow b_{ij}(a_i-a_j)=0\Rightarrow b_{ij}=0$ pentru $i\ne j$.

11. O matrice pătratică se numeşte *scalară* dacă este diagonală şi dacă toate elementele diagonalei sunt egale între ele. Folosind exerciţiul precedent să se demonstreze *lema lui Schur:* Dacă o matrice pătratică A comută cu toate matricele pătratice de acelaşi ordin, atunci A este o matrice scalară.

12. O matrice pătratică A se numeşte *triunghiulară superior* dacă $a_{ij}=0$, pentru $i>j$. Analog, o matrice pătratică A se numeşte *triunghiulară inferior* dacă $a_{ij}=0$, pentru $i<j$. Demonstraţi că produsul matricelor triunghiulare superior (respectiv inferior) de acelaşi ordin este o matrice triunghiulară superior (respectiv inferior).

Indicaţie: $A=(a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}}$ şi $B=(b_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}}$ cu $a_{ij}=0$ şi $b_{ij}=0$ pentru $i>j$. $c_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$, dar $a_{ik}=0$ pentru $i>k$ şi $b_{kj}=0$ pentru $k>j$, deci $c_{ij}=0$ pentru $i>j$.

13. O matrice pătratică de ordin n se numeşte *stochastică* dacă suma elementelor fiecărei linii este egală cu 1. Dacă, în plus, suma elementelor fiecărei coloane este egală cu 1, matricea se numeşte *bistochastică.*
Demonstraţi că:

a) Produsul matricelor stochastice este o matrice stochastică;
b) Produsul matricelor bistochastice este o matrice bistochastică.

14. Să se calculeze: $\lim\limits_{n\to\infty}\begin{pmatrix} 1 & \dfrac{\alpha}{n} \\ -\dfrac{\alpha}{n} & 1 \end{pmatrix}^n$, $\alpha \in \mathbf{R}$.

Indicație: Notând $\dfrac{\alpha}{n} = tg\varphi$, $\varphi\in[0,\pi/2)$ matricea devine:

$$\begin{pmatrix} 1 & \dfrac{\alpha}{n} \\ -\dfrac{\alpha}{n} & 1 \end{pmatrix}^n = \left(1+\frac{\alpha^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}} \cdot \begin{pmatrix} \cos n\varphi & \sin n\varphi \\ -\sin n\varphi & \cos n\varphi \end{pmatrix},$$

limita primului factor fiind 1, iar $\lim\limits_{n\to\infty} n\varphi = \alpha \lim\limits_{\varphi\to 0}\dfrac{\varphi}{tg\varphi} = \alpha$.

Răspuns: $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

§ 2. DETERMINANȚI

1. Să se demonstreze identitățile:

a) $\begin{vmatrix} a^2 & 2ab & b^2 \\ b^2 & a^2 & 2ab \\ 2ab & b^2 & a^2 \end{vmatrix} = \left(a^3+b^3\right)^2$;

b) $\begin{vmatrix} a^2 & 2ab & b^2 \\ ac & ad+bc & bd \\ c^2 & 2cd & d^2 \end{vmatrix} = (ad-bc)^3$;

c) $\begin{vmatrix} ab(c-d) & cd(a-b) & ac-bd \\ a & c & 1 \\ b & d & 1 \end{vmatrix} = 0$.

2. Să se calculeze determinanții:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{vmatrix}$ unde $\omega = \cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}$;

b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \omega \\ 1 & 1 & \omega^2 \\ \omega^2 & \omega & 1 \end{vmatrix}$ unde $\omega = \cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}$;

c) $\begin{vmatrix} 1+\cos\alpha & 1+\sin\alpha & 1 \\ 1-\sin\alpha & 1+\cos\alpha & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

Răspuns: a) $-3i\sqrt{3}$, b) -3 , c) 1.

3. Să se calculeze determinanții:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 4 & 7 \\ -3 & 4 & 5 & 9 \\ -4 & -5 & 6 & 1 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 & 2 \\ 2 & 0 & 7 & 0 \\ -3 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & -4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

Răspuns: a) 216 ; b) -106 ; c) -11.

4. Să se rezolve ecuațiile:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5-t^2 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 5-t^2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0$; b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ t+1 & 2 & t+3 & 4 \\ 1 & 3+t & 4+t & 5+t \\ 1 & -3 & -4 & -5 \end{vmatrix} = 0$;

c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix} = 0$.

Răspuns: a) $-2, -1, 1, 2$; b) $0, -1$; c) $-2, -1, 1, 2$.

5. Să se calculeze următorii determinanți :

a) $\begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ y^2 & y & 1 \\ z^2 & z & 1 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} \cos^{n-1}\varphi_1 & \cos^{n-2}\varphi_1 & \cdots & \cos\varphi_1 & 1 \\ \cos^{n-1}\varphi_2 & \cos^{n-2}\varphi_2 & \cdots & \cos\varphi_2 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \cos^{n-1}\varphi_n & \cos^{n-2}\varphi_n & \cdots & \cos\varphi_n & 1 \end{vmatrix}$;

c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \sin\varphi_1 & \sin\varphi_2 & \cdots & \sin\varphi_n \\ \sin^2\varphi_1 & \sin^2\varphi_2 & \cdots & \sin^2\varphi_n \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \sin^{n-1}\varphi_1 & \sin^{n-1}\varphi_2 & \cdots & \sin^{n-1}\varphi_n \end{vmatrix}$;

d) $\begin{vmatrix} a^n & (a-1)^n & \cdots & (a-n)^n \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & \cdots & (a-n)^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a & a-1 & \cdots & a-n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$;

$$
\text{e)}\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1+1 & x_2+1 & x_3+1 & \dots & x_n+1 \\ x_1^2+x_1 & x_2^2+x_2 & x_3^2+x_3 & \dots & x_n^2+x_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ x_1^{n-1}+x_1^{n-2} & x_2^{n-1}+x_2^{n-2} & x_3^{n-1}+x_3^{n-2} & \dots & x_n^{n-1}+x_n^{n-2} \end{vmatrix}.
$$

Indicație: se reduc la calculul unor determinanți *Vandermonde*. e) se scade linia întâi din linia a doua; în determinantul obținut se scade linia a doua din linia a treia și așa mai departe.

Răspuns: a) (x–y)(y–z)(x–z); b) $2^{\frac{n(n-1)}{2}}\prod\limits_{1\le i<k\le n}\sin\frac{\varphi_i+\varphi_k}{2}\prod\limits_{1\le i<k\le n}\sin\frac{\varphi_k-\varphi_i}{2}$;
c) $2^{\frac{n(n-1)}{2}}\prod\limits_{1\le i<k\le n}\cos\frac{\varphi_i+\varphi_k}{2}\prod\limits_{1\le i<k\le n}\sin\frac{\varphi_k-\varphi_i}{2}$; d) 1!2!3!...n! ; e) $\prod\limits_{1\le k<i\le n}(x_i-x_k)$.

6. Să se calculeze determinanții:

$$
\text{a)}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & . & . & . & n \\ 2 & 2 & 3 & . & . & . & n \\ 3 & 3 & 3 & 4 & . & . & n \\ . & . & . & . & . & . & . \\ n-1 & n-1 & n-1 & . & . & n-1 & n \\ n & n & n & . & . & n & n \end{vmatrix};\ \text{b)}\begin{vmatrix} C_m^0 & C_m^1 & C_m^2 & . & . & . & C_m^p \\ C_{m+1}^0 & C_{m+1}^1 & C_{m+1}^2 & . & . & . & C_{m+1}^p \\ . & . & . & . & . & . & . \\ C_{m+p}^0 & C_{m+p}^1 & C_{m+p}^2 & . & . & . & C_{m+p}^p \end{vmatrix},\ \text{dacă}
$$

p<m, iar p,m∈**N**.

Indicație: a) se scade linia a doua din prima și se dezvoltă după prima linie; în determinantul obținut se aplică același procedeu;

b) se scade linia i din linia i+1, pentru i=p-1,p- 2, . . . ,2,1; se ține seama de formula $C_n^k=C_{n-1}^k+C_{n-1}^{k-1}$.

Răspuns: a) $(-1)^{n-1}n$; b) 1 .

7. Să se demonstreze că dacă într–un determinant de ordin n, mai mult de n^2–n elemente sunt nule, atunci determinantul este nul.

8. Calculați rangul matricelor:

$$
\text{a)}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix};\ \text{b)}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};\ \text{c)}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix};
$$

$$
\text{d)}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.
$$

Răspuns: a) 5 ; b) 3 ; c) 2 ; d) 6 .

9. Să se demonstreze că rangul unei matrice nu se schimbă dacă:
a) se înlocuiesc liniile cu coloanele corespunzătoare;
b) se înmulțesc elementele unei linii sau coloane cu număr nenul;
c) se schimbă două linii (sau două coloane) între ele;
d) se adaugă la elementele unei linii (sau coloane) elementele unei alte linii (sau coloane) înmulțite cu un număr oarecare.

10. Cum se modifică rangul unei matrice dacă i se adaugă:
a) o coloană;
b) două coloane.

Răspuns: a) rămâne același sau crește cu o unitate;
b) rămâne același sau crește cu una sau două unități.

11. Arătați că rangul unei matrice de tip k x n, k≤n având forma:

$$
\begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & a_1^3 & . & . & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & a_2^3 & . & . & a_2^{n-1} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 1 & a_k & a_k^2 & a_k^3 & . & . & a_k^{n-1} \end{pmatrix}
$$

, unde a_1 , a_2, . . ., a_n ∈**R** și sunt distincte, este egal cu k .

12. Să se stabilească dacă următoarele matrice sunt inversabile și atunci când sunt, să se găsească inversele lor:

$$
\text{a)}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & \alpha & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix},\ \alpha\in\mathbf{R}\ ;\ \text{b)}\begin{pmatrix} 3 & -i & 0 \\ i & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix},\ \alpha\in\boldsymbol{C}\ ;\ \text{c)}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix};
$$

$$
\text{d)}\begin{pmatrix} 0 & i & i & i \\ -i & 0 & i & i \\ -i & -i & 0 & i \\ -i & -i & -i & 0 \end{pmatrix}.
$$

Răspuns: a) pentru α≠-8 matricea este inversabilă, având inversa

$$
\frac{1}{3(\alpha+8)}\begin{pmatrix} 2\alpha+4 & 6 & 4-\alpha \\ -6 & 3 & 6 \\ 4-\alpha & -6 & 2\alpha+4 \end{pmatrix}.
$$

b) pentru α≠0 matricea este inversabilă, având inversa $\frac{1}{8\alpha}\begin{pmatrix} 3\alpha & i\alpha & 0 \\ -i\alpha & 3\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$;

c) nu; d) da, având inversa $\begin{pmatrix} 0 & i & -i & i \\ -i & 0 & i & -i \\ i & -i & 0 & i \\ -i & i & -i & 0 \end{pmatrix}$.

13. Să se calculeze matricele inverse ale următoarelor matrice:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 8 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

e) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}$.

Răspuns: a) $-\frac{1}{8}\begin{pmatrix} -3 & 11 & -1 \\ 2 & -10 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$; b) $-\frac{1}{16}\begin{pmatrix} -14 & -2 & 20 \\ -12 & 4 & 8 \\ 10 & -2 & -12 \end{pmatrix}$;

c) $\frac{1}{(a-b)(b-c)(c-a)}\begin{pmatrix} bc(c-b) & ac(a-c) & ab(b-a) \\ b^2-c^2 & c^2-a^2 & a^2-b^2 \\ c-b & a-c & b-a \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & -6 & -10 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{5} \end{pmatrix}$.

§ 3. SISTEME DE ECUAŢII LINIARE

Sistem de ecuaţii liniare este o mulţime de ecuaţii de forma:

(1) $\sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j = b_i$, i = 1, 2, . . ., n ,

unde: $A = \left(a_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le m}}$ este matricea coeficienţilor sistemului,

$B = \left(b_i\right)_{1\le i\le n}$ este matricea coloană a termenilor liberi,

$X = \left(x_i\right)_{1\le i\le m}$ este matricea coloană a necunoscutelor.

Se mai poate scrie matriceal: AX=B.

Sistemul este *compatibil* dacă există X astfel ca AX=B .

Sistemul este *compatibil determinat* dacă X este unică şi *compatibil nedeterminat* dacă există cel puţin $X^{(1)}$ şi $X^{(2)}$ cu $X^{(1)} \neq X^{(2)}$ care verifică: A $X^{(1)}$=B şi A $X^{(2)}$=B.

Sistemul este *incompatibil* dacă nu există nici o matrice X astfel ca AX=B .

Regula lui Cramer se aplică atunci când A este pătratică şi det(A)=Δ≠0,

$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$, unde Δ_i se obţine din Δ prin înlocuirea coloanei a i–a cu B.

?

Teorema lui Rouché. Un sistem de ecuaţii liniare este compatibil determinat dacă şi numai dacă toţi determinanţii lui caracteristici sunt nuli.

În acest caz sistemul are o singură soluţie sau o infinitate după cum toate necunoscutele sale sunt principale sau nu. Soluţiile sistemului se obţin rezolvând ecuaţiile principale în raport cu necunoscutele principale şi lăsând arbitrare celelalte necunoscute.

Metoda eliminării a lui Gauss constă în a aduce matricea A la forma superior triunghiulară.

Se amplifică ecuaţia a i–a a sistemului (1) cu coeficienţii $\lambda_i = \frac{a_{i1}}{a_{11}}$, i=2, 3, ..., n.

Astfel s–a eliminat necunoscuta x_1 din ultimele (n–1) ecuaţii.

Dacă $a_{22}^{\bullet} \neq 0$, se amplifică ecuaţia a i–a a noului sistem obţinut cu coeficienţii $\lambda_i = \frac{a_{i2}}{a_{22}^{\bullet}}$, i=3, 4, ..., n , unde $a_{22}^{\bullet}$ este coeficientul lui x_2 din ecuaţia a doua a sistemului transformat.

Se continuă procedeul până când se obţine un sistem superior triunghiular a cărui rezolvare este imediată.

Pot apărea următoarele situaţii:

– coeficienţii necunoscutelor unei ecuaţii să devină toţi nuli, iar termenul liber corespunzător este diferit de zero. În acest caz sistemul este incompatibil.

– coeficienţii necunoscutelor unei ecuaţii, inclusiv termenul liber corespunzător, să devină toţi nuli. Această ecuaţie dispare.

– dacă a_{11}=0 sau $a_{ii}^{\bullet}$ =0, atunci se caută $a_{ki} \neq 0$, k=1+i,. . .,n şi primul întâlnit, fie k_0 , se schimbă ecuaţia i cu ecuaţia k_0 şi se aplică procedeul în continuare.

Este suficient ca transformările elementare de mai sus să se efectueze asupra matricei complete a sistemului (A | B).

1. Să se rezolve următoarele sisteme folosind regula lui Cramer:

a) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = -4 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -6 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -4 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 8 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -8 \end{cases}$.

Răspuns: a) (3, 1, 1) ; b) (1, 2, –2) ; c) (–1, –1, 0, 1) ; d) (1, 2, –1, –2).

2. Să se discute după parametrul λ şi să se rezolve sistemele:

a) $\begin{cases} x_1+x_2+\lambda x_3=2 \\ x_1+\lambda x_2+x_3=-1 \\ \lambda x_1+x_2+x_3=-1 \end{cases}$; b) $\begin{cases} (3-2\lambda)x_1+(2-\lambda)x_2+x_3=\lambda \\ (2-\lambda)x_1+(2-\lambda)x_2+x_3=1 \\ x_1+x_2+(2-\lambda)x_3=1 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} (3+2\lambda)x_1+(1+3\lambda)x_2+\lambda x_3+(\lambda-1)x_4=3 \\ 3\lambda x_1+(3+2\lambda)x_2+\lambda x_3+(\lambda-1)x_4=1 \\ 3\lambda x_1+3\lambda x_2+3x_3+(\lambda-1)x_4=1 \\ 3\lambda x_1+3\lambda x_2+\lambda x_3+(\lambda-1)x_4=1 \end{cases}$

Răspuns: a) $\lambda \neq 1, -2$ sistemul admite soluție unică : $\left(-\frac{1}{\lambda-1}, -\frac{1}{\lambda-1}, \frac{2}{\lambda-1}\right)$;

$\lambda=1$ sistemul este incompatibil;

$\lambda=-2$ sistemul este compatibil nedeterminat, $(\alpha+1, \alpha+1, \alpha)$ $(\forall)\alpha\in\mathbf{R}$.

b) $\lambda\neq 1, 3$ sistemul este compatibil determinat: $\left(-1, \frac{\lambda-4}{\lambda-3}, -\frac{1}{\lambda-3}\right)$;

$\lambda=1$ sistemul este compatibil nedeterminat: $(1-\alpha-\beta,\alpha,\beta)$ $(\forall)$ $\alpha, \beta\in\mathbf{R}$;

$\lambda=3$ sistemul este incompatibil.

c) $\lambda\neq 1,3$ sistemul este compatibil determinat: $\left(\frac{2}{3-\lambda}, 0, 0, \frac{3-7\lambda}{(\lambda-1)(3-\lambda)}\right)$;

$\lambda=1$ sistemul este incompatibil;

$\lambda=3$ sistemul este compatibil nedeterminat: $\left(-\frac{17}{9}-\frac{\alpha}{3}-\frac{2\beta}{9}, 2, \alpha, \beta\right)$,

$(\forall)$ $\alpha, \beta\in\mathbf{R}$.

3. Să se discute compatibilitatea și să se rezolve sistemele:

a) $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=0 \\ 7x_1+14x_2+20x_3+27x_4=0 \\ 5x_1+10x_2+16x_3+19x_4=-2 \\ 3x_1+5x_2+6x_3+13x_4=5 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3=-1 \\ 7x_1+6x_2+5x_3=\lambda \\ 5x_1+4x_2+3x_3=2 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} 105x_1-175x_2-315x_3+245x_4=84 \\ 90x_1-150x_2-270x_3+210x_4=72 \\ 75x_1-125x_2-225x_3+175x_4=59 \end{cases}$; d) $\begin{cases} x_1+x_2=1 \\ x_1+x_2+x_3=4 \\ x_2+x_3+x_4=-3 \\ x_3+x_4+x_5=2 \\ x_4+x_5=-1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 8x_1+12x_2=20 \\ 14x_1+21x_2=35 \\ 9x_3+11x_4=0 \\ 16x_3+20x_4=0 \\ 10x_5+12x_6=22 \\ 15x_5+18x_6=33 \end{cases}$

Răspuns: a) sistem compatibil determinat: $(1,-1,-1,1)$;

b) pentru $\lambda\neq 5$ sistem incompatibil; $\lambda=5$ sistem compatibil nedeterminat $\left(-4+\alpha, \frac{11}{2}-2\alpha, \alpha\right)$ $(\forall)\alpha\in\mathbf{R}$;

c) sistem incompatibil;

d) sistem compatibil nedeterminat: $(6-\alpha,-5+\alpha,3,-1-\alpha,\alpha)$ $(\forall)\alpha\in\mathbf{R}$;

e) sistem compatibil nedeterminat: $\left(\frac{5}{2}-\frac{3}{2}\alpha, \alpha, 0, 0, \frac{11}{5}-\frac{6}{5}\beta, \beta\right)$ $(\forall)\alpha,\beta\in\mathbf{R}$.

4. Să se rezolve sistemele:

a) $\begin{cases} 2x_1-5x_2+4x_3+3x_4=0 \\ 3x_1-4x_2+7x_3+5x_4=0 \\ 4x_1-9x_2+8x_3+5x_4=0 \\ -3x_1+2x_2-5x_3+3x_4=0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x_1+3x_2+2x_3=0 \\ 2x_1-x_2+3x_3=0 \\ 3x_1-5x_2+4x_3=0 \\ x_1+17x_2+4x_3=0 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3-x_4+x_5=0 \\ 2x_1+x_2-x_3+2x_4-3x_5=0 \\ 3x_1-2x_2-x_3+x_4-2x_5=0 \\ 2x_1-5x_2+x_3-2x_4+2x_5=0 \end{cases}$

Răspuns: a) sistemul admite numai soluția banală: $(0,0,0,0)$;

b) $(-11\alpha,-\alpha,7\alpha)$ $(\forall)\alpha\in\mathbf{R}$;

c) $\left(\frac{7\beta-4\alpha}{8}, \frac{5\beta-4\alpha}{8}, \frac{4\alpha-5\beta}{8}, \alpha, \beta\right)$ $(\forall)\alpha, \beta\in\mathbf{R}$.

5. Să se determine parametrul λ, astfel ca următorul sistem să admită și soluții diferite de soluția banală, și în acest caz să se rezolve:

$$\begin{cases} x_1+x_2+\lambda x_3-x_4=0 \\ 2x_1+x_2-x_3+x_4=0 \\ 3x_1-x_2-x_3-x_4=0 \\ \lambda x_1-2x_2 \quad -2x_4=0 \end{cases}$$

Răspuns: Pentru $\lambda=1$ sistemul admite și soluții nebanale: $(2\alpha,-3\alpha,5\alpha,4\alpha)$, $(\forall)\alpha\in\mathbf{R}$.

6. Să se găsească relația dintre α și β astfel ca sistemul:

$$\begin{cases} 4x_1+3x_2+x_3=5 \\ x_1+5x_2-3x_3=4 \\ \alpha x_1+\beta x_2-2x_3=\alpha+\beta \end{cases}$$

să fie: a) incompatibil;

b) compatibil nedeterminat.

Răspuns: a) $13\beta-14\alpha=34$ și $2\alpha+3\beta\neq 0$; b) $13\beta-14\alpha=34$ și $2\alpha+3\beta=0$ care dau $\alpha=-\frac{3}{2}$, $\beta=1$.

7. Să se rezolve, folosind metoda eliminării a lui Gauss, următoarele sisteme de ecuații liniare:

a) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = -7 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 14 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 11 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 12 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 13 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 14 \end{cases}$; c) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 3 \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 0 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 3x_2 - 13x_3 = -6 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4 \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_4 = 1 \\ -7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3 \end{cases}$; e) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 2x_5 = -2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - x_5 = -3 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 10 \\ x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = -5 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 + 4x_5 = 1 \end{cases}$.

Răspuns: a) *Soluție*: Se scrie matricea sistemului completată cu matricea termenilor liberi și se fac transformări elementare, aducându-se sistemul la forma superior triunghiulară, astfel:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 5 & -7 \\ 2 & 3 & -3 & 14 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 9 & -16 \\ 0 & 4 & -8 & 24 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 44 & -88 \\ 0 & 0 & -44 & 88 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 44 & -88 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sistemul devine:

$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 5x_2 + x_3 = 8 \\ x_3 = -2 \end{cases}$. Soluția este: (1, 2, –2).

b) (2, 1, 1, 1) ; c) (1, 2, 1) ; d) (–8, 3+α, 6+2α, α) (∀)α∈R ; e) sistem incompatibil.

8. Să se rezolve pe cale matriceală sistemele:

a) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 31 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 29 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 10 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11 \end{cases}$;

c) AX=B, unde: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4 \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 6 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 6 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 6 \end{cases}$

Răspuns: a) (3, 4, 5); b) (2, –2, 3); c) (–2, 2, –3, 3); d) (2, 0, 0, 0).

9. Să se calculeze, folosind metoda lui Gauss, inversele următoarelor matrice:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -4 \\ -2 & 3 & -4 & 6 \\ 3 & -6 & 5 & -10 \\ -6 & 9 & -10 & 15 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Răspuns: a) *Soluție*:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\approx \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

S–au obținut sistemele:

$\begin{cases} 2x_{11} + 3x_{21} + 4x_{31} + 5x_{41} = 1 \\ x_{21} + 2x_{31} + 3x_{41} = -1 \\ 2x_{31} + 4x_{41} = -2 \\ 2x_{41} = -2 \end{cases}$ cu soluția: $x_{41}=-1$; $x_{31}=1$; $x_{21}=0$; $x_{11}=1$

$\begin{cases} 2x_{12} + 3x_{22} + 4x_{32} + 5x_{42} = 0 \\ x_{22} + 2x_{32} + 3x_{42} = 2 \\ 2x_{32} + 4x_{42} = 2 \\ 2x_{42} = 2 \end{cases}$ cu soluția: $x_{42}=1$; $x_{32}=-1$; $x_{22}=1$; $x_{12}=-2$

$\begin{cases} 2x_{13} + 3x_{23} + 4x_{33} + 5x_{43} = 0 \\ x_{23} + 2x_{33} + 3x_{43} = 0 \\ 2x_{33} + 4x_{43} = 2 \\ 2x_{43} = 0 \end{cases}$ cu soluția: $x_{43}=0$; $x_{33}=1$; $x_{23}=-2$; $x_{13}=1$

$\begin{cases} 2x_{14} + 3x_{24} + 4x_{34} + 5x_{44} = 0 \\ x_{24} + 2x_{34} + 3x_{44} = 0 \\ 2x_{34} + 4x_{44} = 0 \\ 2x_{44} = 2 \end{cases}$ cu soluția: $x_{44}=1$; $x_{34}=-2$; $x_{24}=1$; $x_{14}=0$

Deci inversa este:

a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

c) $A^{-1}=\begin{pmatrix}15 & 10 & -6 & -4\\ 10 & 5 & -4 & -2\\ -9 & -6 & 3 & 2\\ -6 & -3 & 2 & 1\end{pmatrix}$; d) $A^{-1}=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0 & 0\\ -3 & 2 & 0 & 0\\ 31 & -19 & 3 & -4\\ -23 & 14 & -2 & 3\end{pmatrix}$

10. Să se rezolve următoarele ecuații matriceale:

$\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & 3\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}4 & -6\\ 2 & 1\end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 5 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 3 & -1\end{pmatrix}$

c) $X\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 4\\ 3 & 4 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 9 & 8\\ 0 & 1 & 6\end{pmatrix}$; d) $X\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 4 & 3 & 2\\ 1 & -2 & 5\end{pmatrix}$.

Răspuns: a) $\begin{pmatrix}2 & -23\\ 0 & 8\end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix}24 & 13\\ -34 & -18\end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix}-3 & 2 & 0\\ -4 & 5 & -2\\ -5 & 3 & 0\end{pmatrix}$.

CAPITOLUL II

ALGEBRĂ VECTORIALĂ

Fie E_3 spațiul geometriei elementare. Elementele din E_3 se numesc puncte și vor fi notate cu A,B,C... . O pereche ordonată de puncte $(A,B)\in E_3\times E_3$ se numește *vector legat* sau segment orientat și va fi notată prin $\overrightarrow{AB}$. Dacă A coincide cu B, vectorul $\overrightarrow{AA}$ se numește vectorul nul. Distanța de la punctul A la punctul B se numește *norma* (modulul sau lungimea) vectorului $\overrightarrow{AB}$ și va fi notată cu $\|\overrightarrow{AB}\|$.

Doi vectori legați nenuli se numesc *echipolenți* dacă au aceeași direcție, același sens și aceeași normă. Relația de echipolență este o relație de echivalență pe mulțimea vectorilor legați nenuli. Relația se extinde și la vectorii legați nuli admițând că toți vectorii legați nuli sunt echipolenți între ei.

Se numește *vector liber* o clasă de echivalență formată din mulțimea tuturor vectorilor legați echipolenți între ei. Vectorii liberi vor fi notați cu $\bar{a},\bar{b},\bar{c},\ldots,\bar{v},\bar{w}$. Clasa de echivalență a vectorilor legați nuli se notează cu $\bar{0}$ și se numește vectorul liber nul. Orice vector legat $\overrightarrow{AB}$ din clasa de echivalență a vectorului liber $\bar{a}$ se numește *reprezentant* al lui $\bar{a}$. Se notează aceasta prin $\overrightarrow{AB}\in\bar{a}$. Pentru simplificarea notației, vom scrie uneori $\overrightarrow{AB}=\bar{a}$ nefăcând distincție între vectorul legat $\overrightarrow{AB}$ și vectorul liber $\bar{a}$ reprezentat de acesta. Prin direcția, sensul și norma unui vector liber nenul $\bar{a}$ se înțelege direcția, sensul și norma unui reprezentat $\overrightarrow{AB}\in\bar{a}$.

Vom nota cu V_3 mulțimea tuturor vectorilor liberi. Pe V_3 se introduc operațiile de adunare a vectorilor liberi și de înmulțire cu scalari reali. Aceste operații au următoarele proprietăți:

I. V_3 împreună cu operația de adunare a vectorilor este un grup comutativ, adică:

1) $(\bar{a}+\bar{b})+\bar{c}=\bar{a}+(\bar{b}+\bar{c}),\ \forall\,\bar{a},\bar{b},\bar{c}\in V_3$ - adunarea este asociativă;

2) $\bar{a}+\bar{b}=\bar{b}+\bar{a},\ \forall\,\bar{a},\bar{b}\in V_3$ - adunarea este comutativă;

3) $\bar{a}+\bar{0}=\bar{0}+\bar{a},\ \forall\,\bar{a}\in\bar{V}_3$ - vectorul nul $\bar{0}$ este elementul neutru pentru adunare;

4) Pentru orice vector $\bar{a}\in V_3$ există în V_3 un vector notat $-\bar{a}$, numit opusul lui $\bar{a}$, astfel încât $\bar{a}+(-\bar{a})=(-\bar{a})+\bar{a}=\bar{0}$.

II. Înmulțirea cu scalari are proprietățile:

1) $1\cdot\bar{a}=\bar{a},\ \forall\,\bar{a}\in V_3$;

2) $(\lambda\mu)\bar{a}=\lambda(\mu\bar{a}),\ \forall\lambda,\mu\in\mathbf{R},\ \forall\,\bar{a}\in V_3$;

3) $(\lambda+\mu)\bar{a}=\lambda\bar{a}+\mu\bar{a},\quad \forall\lambda,\mu\in\mathbf{R},\ \forall\,\bar{a}\in V_3$;

4) $\lambda(\bar{a}+\bar{b})=\lambda\bar{a}+\lambda\bar{b},\ \forall\lambda\in\mathbf{R},\ \forall\,\bar{a},\bar{b}\in V_3$.

Mulțimea vectorilor liberi V_3 înzestrată cu operațiile de adunare și de înmulțire cu scalari reali cu proprietățile de mai sus este un *spațiu vectorial* real.

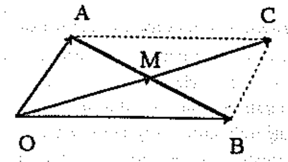
§1. CALCUL VECTORIAL

1. Fie O un punct fix din spațiu și fie $\overrightarrow{OA}$ și $\overrightarrow{OB}$ vectorii de poziție ai altor două puncte A și B. Demonstrați că vectorul de poziție al punctului M, mijlocul segmentului [AB], este dat de formula

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}.$$

Soluție. Fie OACB paralelogramul determinat de vectorii $\overrightarrow{OA}$ și $\overrightarrow{OB}$. Conform regulei paralelogramului $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$. Deoarece diagonalele paralelogramului se taie în părți egale, punctul M, mijlocul segmnetului [AB], este și mijlocul segmentului [OC]. Atunci

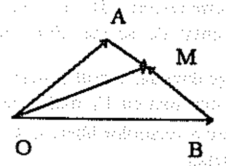
$$\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OC}}{2} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}.$$



2. Fie $\overrightarrow{OA}$ și $\overrightarrow{OB}$ vectorii de poziție pentru două puncte A și B din spațiu. Demonstrați că vectorul de poziție al punctului M care împarte segmentul [AB] într-un raport k, unde $k = \dfrac{\text{dist}(A, M)}{\text{dist}(B, M)}$, este dat de formula

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OB}}{1+k}.$$

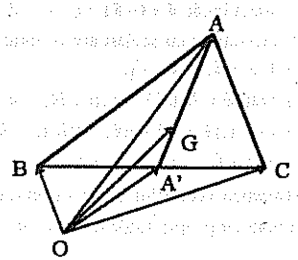
Soluție. Cu notațiile din figura alaturată, avem $\overrightarrow{AM} = -k\,\overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = -k(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OB})$, de unde rezultă relația din enunț.



3. Fie $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ vectorii de poziție pentru trei puncte A, B, C din spațiu. Demonstrați că vectorul de poziție al punctului G, centrul de greutate al triunghiului ABC, este dat de formula

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3}.$$

Soluție. Fie A' mijlocul laturii [BC]. Conform problemei 1 avem egalitatea $\overrightarrow{OA'} = \dfrac{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{2}$. Punctul G se află pe mediatoarea [AA'] la 2/3 de A și 1/3 de A'. Deci $k = \dfrac{\text{dist}(A, G)}{\text{dist}(A', G)} = 2$. În baza formulei din problema 2 obținem



$$\overrightarrow{OG} = \frac{\overrightarrow{OA} + 2\cdot\overrightarrow{OA'}}{1+2} = \frac{\overrightarrow{OA} + 2\cdot\dfrac{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{2}}{3} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3}.$$

4. Fie A', B', C' mijloacele laturilor [BC], [CA], [AB] ale unui triunghi ABC și fie O un punct oarecare în spațiu. Demonstrați egalitatea:

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'}.$$

5. Se consideră o piramidă cu vârful în punctul S și baza un paralelogram ABCD ale cărui diagonale se intersectează în punctul O. Demonstrați egalitatea:

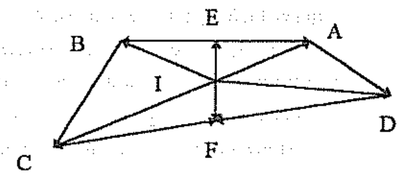
$$\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD} = 4\overrightarrow{SO}.$$

6. Fie ABC un triunghi echilateral și O centrul cercului circumscris triunghiului. Demonstrați egalitatea: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AO}$.

7. În patrulaterul ABCD fie E și F mijloacele laturilor [AB], respectiv [CD], și I mijlocul segmentului [EF]. Demonstrați egalitățile:

a) $\overrightarrow{EF} = \dfrac{\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}}{2}$; b) $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$.

Indicație. a) Se adună relațiile $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DF}$, $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CF}$ și se ține seama că vectorii $\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EB}$, respectiv $\overrightarrow{BF}, \overrightarrow{CF}$ sunt opuși.
b) Se adună relațiile $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = 2\overrightarrow{IE}$, $\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = 2\overrightarrow{IF}$.



8. Se consideră un patrulater (plan sau strâmb) ABCD în care E și F sunt mijloacele diagonalelor [AC], respectiv [BD]. Demonstrați egalitatea:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} = 4\overrightarrow{EF}.$$

9. În hexagonul regulat ABCDEF se consideră vectorii $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$. Scrieți vectorii $\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DE}, \overrightarrow{EF}, \overrightarrow{FA}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}$ în funcție de $\vec{a}$ și $\vec{b}$.

Răspuns. Vectorii ceruți sunt: $\vec{b} - \vec{a}, -\vec{a}, -\vec{b}, \vec{a} - \vec{b}, \vec{a} + \vec{b}, 2\vec{b}, 2\vec{b} - \vec{a}$.

10. În interiorul cercului de centru O se consideră un punct P, prin care se duc coardele perpendiculare [AB] și [CD]. Demonstrați egalitatea:

$$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = 2\overrightarrow{PO}.$$

Indicație. Se raportează toți vectorii la vectori cu originea în O.

§2. LINIAR DEPENDENȚĂ, LINIAR INDEPENDENȚĂ, BAZE

Vectorii $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n \in V_3$ se numesc *liniar dependenți* dacă există scalarii $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbf{R}$, nu toți nuli, astfel încât

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n = \vec{0}.$$

Vectorii $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n \in V_3$ se numesc *liniar independenți* dacă nu sunt liniar dependenți, adică dacă din egalitatea $\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n = \vec{0}$ rezultă $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$.

Doi vectori liberi nenuli $\vec{a}, \vec{b} \in V_3$ se numesc *coliniari* dacă reprezentanții lor cu originea în același punct O, $\overrightarrow{OA} \in \vec{a}$ și $\overrightarrow{OB} \in \vec{b}$, sunt coliniari (adică punctele O,A,B sunt coliniare). Vectorii nenuli $\vec{a}, \vec{b} \in V_3$ sunt coliniari $\Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}$ sunt liniar dependenți $\Leftrightarrow$ există $\lambda \in \mathbf{R}^*$ astfel încât $\vec{b} = \lambda \vec{a}$.

Trei vectori liberi nenuli $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V_3$ se numesc *coplanari* dacă reprezentanții lor cu originea în același punct O, $\overrightarrow{OA} \in \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} \in \vec{b}$ și $\overrightarrow{OC} \in \vec{c}$, sunt coplanari (adică punctele O,A,B,C sunt coplanare). Vectorii nenuli $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V_3$ sunt coplanari $\Leftrightarrow$ sunt liniar dependenți $\Leftrightarrow$ există $\lambda, \mu \in \mathbf{R}, \lambda^2 + \mu^2 \neq 0$, astfel încât să avem o relație de tipul $\vec{a} = \lambda \vec{b} + \mu \vec{c}$. În consecință, trei vectori liberi nenuli sunt necoplanari (adică nu sunt coplanari) dacă și numai dacă sunt liniar independenți.

Oricare patru vectori din V_3 sunt liniar dependenți.

Mulțimea $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\} \subset V_3$ se numește *bază* a spațiului vectorial V_3 dacă:

1) Vectorii $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sunt liniar independenți;
2) Vectorii $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ formează un sistem de generatori pentru V_3. Aceasta înseamnă că orice vector $\vec{v} \in V_3$ se scrie ca o combinație liniară a vectorilor $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, adică există scalarii $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbf{R}$ astfel încât $\vec{v} = \lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b} + \lambda_3 \vec{c}$.

Datorită liniar independenței vectorilor $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ scrierea de mai sus este unică. Scalarii $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ se numesc *componentele* vectorului $\vec{v}$ în baza $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$. Din punct de vedere geometric, se spune că vectorul $\vec{v}$ se descompune în mod unic după direcțiile vectorilor $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

Trei vectori liberi nenuli $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ constituie o bază a spațiului V_3 dacă și numai dacă sunt necoplanari.

1. Demonstrați că vectorii $\vec{a} = 5\vec{i} - \vec{j}$, $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{c} = -\vec{i} + 2\vec{j}$ sunt liniar dependenți și determinați scrierea vectorului $\vec{a}$ în funcție de $\vec{b}$ și $\vec{c}$.

Soluție. Pentru a demonstra că vectorii dați sunt liniar dependenți vom arăta că există scalarii $\lambda, \mu \in \mathbf{R}, \lambda^2 + \mu^2 \neq 0$, astfel ca $\vec{a} = \lambda \vec{b} + \mu \vec{c}$. Introducând în această relație expresiile vectorilor $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, obținem $5\vec{i} - \vec{j} = \lambda(\vec{i} + \vec{j}) + \mu(-\vec{i} + 2\vec{j})$. Scrierea unui vector într-o bază fiind unică rezultă sistemul

$$\begin{cases} \lambda - \mu = 5, \\ \lambda + 2\mu = -1, \end{cases}$$

care are soluția $\lambda = 3, \mu = -2$. Scrierea vectorului $\vec{a}$ în funcție de $\vec{b}$ și $\vec{c}$ este $\vec{a} = 3\vec{b} - 2\vec{c}$.

2. Demonstrați că vectorii $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = -\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{c} = -\frac{1}{4}\vec{i} - \vec{j} + \frac{11}{4}\vec{k}$ sunt coplanari și determinați descompunerea vectorului $\vec{c}$ după direcțiile vectorilor $\vec{a}$ și $\vec{b}$.

Răspuns: $\vec{c} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b}$.

3. Se dau vectorii $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{b} = \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$.

a) Demonstrați că $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ este o bază a spațiului vectorilor liberi V_3.

b) Determinați scrierea vectorului $\vec{v} = \vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$ în baza $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$.

Soluție. a) Demonstrăm mai întâi că vectorii $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sunt liniar independenți. Fie $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbf{R}$ astfel încât $\lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b} + \lambda_3 \vec{c} = \vec{0}$. Introducând expresiile vectorilor $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ în relația anterioară se obține $\lambda_1(\vec{i} + \vec{j}) + \lambda_2(\vec{j} + \vec{k}) + \lambda_3(\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}) = \vec{0}$ sau $(\lambda_1 + \lambda_3)\vec{i} + (\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3)\vec{j} + (\lambda_2 + 3\lambda_3)\vec{k} = \vec{0}$. Vectorii $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ fiind liniar independenți rezultă sistemul liniar omogen

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0, \\ \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0, \\ \lambda_2 + 3\lambda_3 = 0. \end{cases}$$

Deoarece determinantul sistemului este egal cu 2, sistemul admite numai soluția banală $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Aceasta înseamnă că vectorii $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sunt liniar independenți.

Pentru a demonstra că vectorii $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ formează un sistem de generatori pentru V_3, fie $\vec{v} = \alpha\,\vec{i} + \beta\,\vec{j} + \gamma\,\vec{k}$ un vector oarecare din V_3. Avem de arătat că există scalarii $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbf{R}$ astfel încât $\lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b} + \lambda_3 \vec{c} = \vec{v}$. Procedând ca mai sus și folosind unicitatea scrierii unui vector într-o bază obținem sistemul liniar neomogen

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = \alpha, \\ \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = \beta, \\ \lambda_2 + 3\lambda_3 = \gamma. \end{cases}$$

Acesta are soluția unică

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(\alpha + \beta - \gamma),\ \lambda_2 = \frac{1}{2}(-3\alpha + 3\beta - \gamma),\ \lambda_3 = \frac{1}{2}(\alpha - \beta + \gamma).$$

Deci, mulțimea $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ este o bază pentru V_3 și orice vector $\vec{v} = \alpha\,\vec{i} + \beta\,\vec{j} + \gamma\,\vec{k}$ se scrie în mod unic în această bază sub forma

$$\vec{v} = \alpha\,\vec{i} + \beta\,\vec{j} + \gamma\,\vec{k} = \frac{\alpha + \beta - \gamma}{2}\vec{a} + \frac{-3\alpha + 3\beta - \gamma}{2}\vec{b} + \frac{\alpha - \beta + \gamma}{2}\vec{c}.$$

b) În baza formulei de mai sus, vectorul $\vec{v} = \vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$ are în baza $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ scrierea $\vec{v} = -2\vec{a} - 7\vec{b} + 3\vec{c}$.

4. Se dau vectorii: $\vec{a}=2\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{b}=-\vec{i}+\frac{1}{2}\vec{j}+3\vec{k}$, $\vec{c}=\frac{1}{4}\vec{i}-5\vec{j}-\vec{k}$.

a) Demonstrați că $\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$ este o bază a spațiului vectorilor liberi V_3.

b) Descompuneți vectorul $\vec{v}=\vec{i}-18\vec{j}+\vec{k}$ după direcțiile vectorilor $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$.

Răspuns: b) $\vec{v}=\vec{a}+2\vec{b}+4\vec{c}$.

5. Fie vectorii $\vec{a}=\vec{i}+\lambda\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{b}=\mu\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}$ $(\lambda,\mu\in\mathbb{R})$. Determinați λ și μ astfel încât vectorii $\vec{a}$ și $\vec{b}$ să fie coliniari.

Răspuns: $\lambda=3, \mu=1$.

6. Dacă vectorii $\vec{a},\vec{b},\vec{c}\in V_3$ sunt liniar independenți, determinați $x\in\mathbb{R}$ astfel încât vectorii

$$\vec{v}_1=x\vec{a}+\vec{b}+\vec{c},\quad \vec{v}_2=\vec{a}+x\vec{b}+\vec{c},\quad \vec{v}_3=\vec{a}+\vec{b}+x\vec{c}$$

să fie coplanari.

Soluție. Vectorii $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3$ sunt coplanari dacă și numai dacă sunt liniar dependenți, adică dacă există $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in\mathbb{R}$, nu toți nuli, astfel ca $\lambda_1\vec{v}_1+\lambda_2\vec{v}_2+\lambda_3\vec{v}_3=\vec{0}$ sau $(x\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)\vec{a}+(\lambda_1+x\lambda_2+\lambda_3)\vec{b}+(\lambda_1+\lambda_2+x\lambda_3)\vec{c}=\vec{0}$. Deoarece $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ sunt liniar independenți obținem sistemul liniar și omogen

$$\begin{cases} x\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0,\\ \lambda_1+x\lambda_2+\lambda_3=0,\\ \lambda_1+\lambda_2+x\lambda_3=0.\end{cases}$$

Pentru ca sistemul să admită și soluții diferite de soluția nulă trebuie ca determinantul sistemului să fie egal cu zero:

$$\Delta=x^3-3x+2=(x-1)^2(x+2)=0.$$

Deci $x=1$ și $x=2$.

§3. PRODUSUL SCALAR

Fie $\vec{a},\vec{b}$ doi vectori liberi și $\theta\in[0,\pi]$ măsura unghiului dintre $\vec{a}$ și $\vec{b}$, în cazul $\vec{a}\neq\vec{0},\vec{b}\neq\vec{0}$. Se numește *produs scalar* al vectorilor $\vec{a}$ și $\vec{b}$ numărul real (scalarul) notat $\vec{a}\cdot\vec{b}$ definit prin

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\begin{cases}\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|\cdot\cos\theta, \text{ pentru } \vec{a}\neq\vec{0},\vec{b}\neq\vec{0},\\ 0, \text{ pentru } \vec{a}=\vec{0} \text{ sau } \vec{b}=\vec{0}.\end{cases}$$

Proprietățile algebrice ale produsului scalar

1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ - produsul scalar este comutativ;
2) $\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})=(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(\lambda\vec{b}), \forall\lambda\in\mathbb{R}$;
3) $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$, $(\vec{b}+\vec{c})\cdot\vec{a}=\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{c}\cdot\vec{a}$ - produsul scalar este distributiv față de adunarea vectorilor;
4) $\vec{a}\cdot\vec{a}=\|a\|^2\geq 0$ și $\vec{a}\cdot\vec{a}=0\Leftrightarrow\vec{a}=\vec{0}$ - produsul scalar este pozitiv definit.

Proprietățile geometrice ale produsului scalar

1) Doi vectori nenuli sunt *ortogonali* dacă și numai dacă produsul lor scalar este egal cu zero.

$$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0.$$

2) Produsul scalar al vectorilor nenuli $\vec{a}$ și $\vec{b}$ este egal cu produsul dintre norma unuia dintre vectori și mărimea algebrică a proiecției celui de al doilea vector pe direcția primului.

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\|\vec{a}\|\mathrm{pr}_{\vec{a}}(\vec{b})=\|\vec{b}\|\mathrm{pr}_{\vec{b}}(\vec{a}).$$

Expresia analitică a produsului scalar

Dacă vectorii $\vec{a},\vec{b}$ au în baza canonică $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ scrierile

$$\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k},\quad \vec{b}=b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}$$

atunci produsul scalar are expresia analitică

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3.$$

În plus,

$$\|\vec{a}\|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$$

și, dacă $\vec{a}\neq\vec{0},\vec{b}\neq\vec{0}$,

$$\cos(\vec{a},\vec{b})=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}.$$

Aplicațiile produsului scalar:

1) Distanța dintre două puncte A, B: $\mathrm{dist}(A,B)=\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}}$.

2) Unghiul dintre doi vectori nenuli: $\cos(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|}$.

3) Proiecția unui vector $\vec{a}$ pe un vector $\vec{b}\neq\vec{0}$: $\overrightarrow{\mathrm{Pr}_{\vec{b}}(\vec{a})}=\mathrm{pr}_{\vec{b}}(\vec{a})\dfrac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|}=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{b}\|^2}\vec{b}$.

4) Ortogonalitatea a doi vectori nenuli $\vec{a},\vec{b}$: $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.

1. Se dau vectorii liberi $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ despre care se știe că $\|\vec{a}\|=1$, $\|\vec{b}\|=2$, $\|\vec{c}\|=\sqrt{2}$ și $\angle(\vec{a},\vec{b})=\frac{\pi}{6}$, $\angle(\vec{a},\vec{c})=\frac{\pi}{4}$, $\angle(\vec{b},\vec{c})=\frac{\pi}{3}$. Calculați norma vectorului $\vec{v}=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$.

Soluție. După cum se știe $\|\vec{v}\|=\sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}}$. Atunci $\|\vec{v}\|=\sqrt{(\vec{a}-\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{a}-\vec{b}+\vec{c})}=$

$$=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}+\vec{c}\cdot\vec{c}-2\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{a}\cdot\vec{c}-2\vec{b}\cdot\vec{c}}=$$

$$=\sqrt{\|\vec{a}\|^2+\|\vec{b}\|^2+\|\vec{c}\|^2-2\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|\cdot\cos(\vec{a},\vec{b})+2\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{c}\|\cdot\cos(\vec{a},\vec{c})-2\|\vec{b}\|\cdot\|\vec{c}\|\cdot\cos(\vec{b},\vec{c})}=$$

$$=\sqrt{1+2^2+(\sqrt{2})^2-2\cdot1\cdot2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+2\cdot1\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-2\cdot2\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}}=\sqrt{9-2\sqrt{2}-2\sqrt{3}}.$$

2. Se dau vectorii $\vec{a} = 2\vec{m} - 5\vec{n}$, $\vec{b} = 8\vec{m} - 3\vec{n}$, unde $\|\vec{m}\| = \sqrt{2}$, $\|\vec{n}\| = 1$, iar $\angle(\vec{m},\vec{n}) = \frac{\pi}{4}$. Calculaţi măsura unghiului dintre vectorii $\vec{a}$ şi $\vec{b}$.

Soluţie. Folosind definiţia produsului scalar avem $\vec{m}\cdot\vec{n} = \|\vec{m}\|\cdot\|\vec{n}\|\cdot\cos(\vec{m},\vec{n}) = 1$. Atunci $\|\vec{a}\|^2 = (2\vec{m} - 5\vec{n})^2 = 4\|\vec{m}\|^2 - 20\vec{m}\cdot\vec{n} + 25\|\vec{n}\|^2 = 13$ şi similar $\|\vec{b}\|^2 = 89$, iar $\vec{a}\cdot\vec{b} = 1$. Prin urmare $\cos(\vec{a},\vec{b}) = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|} = \dfrac{1}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{89}}$.

3. Ştiind că $\|\vec{a}\| = 2$, $\|\vec{b}\| = 5$, $\angle(\vec{a},\vec{b}) = \frac{2\pi}{3}$, determinaţi pentru ce valoare a lui $\lambda \in R$ vectorii $\vec{v} = \lambda\,\vec{a} + 17\vec{b}$ şi $\vec{w} = 3\vec{a} - \vec{b}$ sunt perpendiculari.

Răspuns. $\lambda = 40$.

4. Calculaţi unghiul format de vectorii $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ ştiind că vectorul $\vec{a} + 3\vec{b}$ este perpendicular pe vectorul $7\vec{a} - 5\vec{b}$ şi vectorul $\vec{a} - 4\vec{b}$ este perpendicular pe vectorul $7\vec{a} - 2\vec{b}$.

Indicaţie. Din sistemul $(\vec{a} + 3\vec{b})\cdot(7\vec{a} - 5\vec{b}) = 0$, $(\vec{a} - 4\vec{b})\cdot(7\vec{a} - 2\vec{b}) = 0$ se determină $\|\vec{a}\| = \sqrt{2\vec{a}\cdot\vec{b}}$ şi $\|\vec{b}\| = \sqrt{2\vec{a}\cdot\vec{b}}$. Atunci $\angle(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\pi}{3}$.

5. Se dau punctele A(1,2,-3), B(-1,-2,1). Determinaţi proiecţia vectorului $\overrightarrow{AB}$ pe prima bisectoare a triedrului *Oxyz*.

Soluţie. Bisectoarea triedrului *Oxyz* are vectorul director $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$. Notăm cu $\overrightarrow{AB}'$ proiecţia vectorului $\overrightarrow{AB}$ pe $\vec{v}$. Atunci, cum $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (-\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}) - (\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}) = -2\vec{i} - 4\vec{j} + 4\vec{k}$, obţinem

$$\overrightarrow{AB}' = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\vec{v} = \frac{(-2\vec{i} - 4\vec{j} + 4\vec{k})\cdot(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})}{3}\vec{v} = -\frac{2}{3}\vec{v}.$$

6. Se dau vectorii $\overrightarrow{OA} = 12\vec{i} - 4\vec{j} + 3\vec{k}$, $\overrightarrow{OB} = 3\vec{i} + 12\vec{j} - 4\vec{k}$, $\overrightarrow{OC} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}$.

a) Demonstraţi că ΔAOB este isoscel, iar ΔAOC este dreptunghic.

b) Calculaţi perimetrul triunghiului ABC şi masura unghiului A.

Răspuns. a) $\|\overrightarrow{OA}\| = \|\overrightarrow{OB}\| = 13$; $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC} = 0$. b) Perimetrul triunghiului ABC $\|\overrightarrow{AB}\| + \|\overrightarrow{BC}\| + \|\overrightarrow{CA}\| = \sqrt{386} + \sqrt{82} + \sqrt{198}$; $\cos A = \dfrac{251}{\sqrt{386}\cdot\sqrt{198}}$.

7. Un pătrat ABCD are două vârfuri consecutive A(2,3), B(6,6). Să se afle coordonatele celorlalte două vârfuri.

Răspuns. Se obţin două pătrate ABC_1D_1 şi ABC_2D_2, unde $C_1(3,10)$, $D_1(-1,7)$, iar $C_2(9,2)$, $D_2(5,-1)$.

8. Se dau vectorii $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{k}$, $\vec{b} = -\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{c} = -3\vec{i} + 3\vec{j}$. Determinaţi numerele reale λ şi μ astfel încât vectorul $\vec{v} = \vec{a} + 2\lambda\,\vec{b} + 2\mu\,\vec{c}$ să fie:

a) perpendicular pe planul *yOz*.

b) egal înclinat faţa de axele *Ox*, *Oy*, *Oz*.

Soluţie. Pentru determinarea parametilor $\lambda, \mu \in R$ se impun condiţiile:

a) $\vec{v}\cdot\vec{j} = 0$, $\vec{v}\cdot\vec{k} = 0$, de unde rezultă $\lambda = \frac{1}{4}$, $\mu = \frac{1}{12}$;

b) $\vec{v}\cdot\vec{i} = \vec{v}\cdot\vec{j} = \vec{v}\cdot\vec{k}$, de unde se obţin $\lambda = \frac{2}{5}$, $\mu = \frac{7}{30}$.

9. În spaţiul vectorilor liberi V_3 se consideră baza $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$, unde $\vec{v}_1 = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{v}_2 = \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{v}_3 = \vec{i} + \vec{k}$. Pornind de la această bază, construiţi, folosind procedeul de ortogonalizare Gram-Schmidt, o bază ortonormată pentru spaţiul V_3. Care este scrierea vectorului $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$ în noua bază construită?

Soluţie. O bază $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ a spaţiului V_3 se numeşte *ortogonală* dacă vectorii care o compun sunt ortogonali doi câte doi. Baza $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ se numeşte *ortonormată* dacă este ortogonală şi orice vector al ei are norma egală cu unu.

Construim mai întâi o bază *ortogonală* $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$. Pentru aceasta notăm $\vec{w}_1 = \vec{v}_1$, $\vec{w}_2 = \vec{v}_2 + \lambda_{21}\vec{v}_1$, $\vec{w}_3 = \vec{v}_3 + \lambda_{31}\vec{v}_1 + \lambda_{32}\vec{v}_2$, unde $\lambda_{21}, \lambda_{31}, \lambda_{32}$ sunt numere reale care se determină din condiţiile: $\vec{w}_2 \perp \vec{w}_1$, $\vec{w}_3 \perp \vec{w}_1$, $\vec{w}_3 \perp \vec{w}_2$. Avem

$$\vec{w}_2 \perp \vec{w}_1 \Leftrightarrow \vec{w}_2\cdot\vec{w}_1 = 0 \Leftrightarrow (\vec{v}_2 + \lambda_{21}\vec{w}_1)\cdot\vec{w}_1 = 0 \Rightarrow \lambda_{21} = -\frac{\vec{v}_2\cdot\vec{w}_1}{\vec{w}_1^2} = -\frac{1}{2},\ \text{deci}$$

$$\vec{w}_2 = \vec{v}_2 - \frac{1}{2}\vec{w}_1 = -\frac{1}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j} + \vec{k}.$$

$$\vec{w}_3 \perp \vec{w}_1 \Leftrightarrow \vec{w}_3\cdot\vec{w}_1 = 0 \Leftrightarrow (\vec{v}_3 + \lambda_{31}\vec{w}_1 + \lambda_{32}\vec{w}_2)\cdot\vec{w}_1 = 0 \Rightarrow \lambda_{31} = -\frac{\vec{v}_3\cdot\vec{w}_1}{\vec{w}_1^2} = -\frac{1}{2}$$

şi, analog, $\vec{w}_3 \perp \vec{w}_2 \Rightarrow \lambda_{32} = -\dfrac{\vec{v}_3\cdot\vec{w}_2}{\vec{w}_2^2} = -\dfrac{1}{3}$. Atunci

$$\vec{w}_3 = \vec{v}_3 - \frac{1}{2}\vec{w}_1 - \frac{1}{3}\vec{w}_2 = \frac{2}{3}(\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}).$$

Baza ortonormată căutată este

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{w}_1}{\|\vec{w}_1\|^2} = \frac{\vec{i} + \vec{j}}{\sqrt{2}},\quad \vec{e}_2 = \frac{\vec{w}_2}{\|\vec{w}_2\|^2} = \frac{-\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}}{\sqrt{6}},\quad \vec{e}_3 = \frac{\vec{w}_3}{\|\vec{w}_3\|^2} = \frac{\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{3}}.$$

Dacă vectorul $\vec{a}$ are în baza $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ scrierea $\vec{a} = \lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 + \lambda_3\vec{e}_3$, atunci

$$\lambda_1 = \vec{a}\cdot\vec{e}_1 = (\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k})\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} + \vec{j}) = -\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \lambda_2 = \vec{a}\cdot\vec{e}_2 = \frac{3}{\sqrt{6}},\quad \lambda_3 = \vec{a}\cdot\vec{e}_3 = \frac{6}{\sqrt{3}}.$$

Deci $\vec{a} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_1 + \dfrac{3}{\sqrt{6}}\vec{e}_2 + \dfrac{6}{\sqrt{3}}\vec{e}_3$.

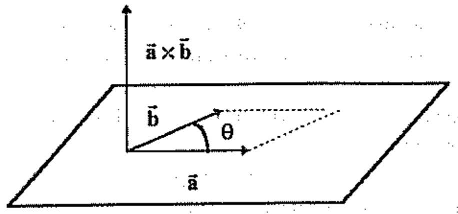
§4. PRODUSUL VECTORIAL

Fie $\vec{a}, \vec{b}$ doi vectori liberi nenuli şi necoliniari şi $\theta \in (0,\pi)$ măsura unghiului dintre ei. Se numeşte *produs vectorial* al vectorilor $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ (în această ordine) un *vector* notat $\vec{a} \times \vec{b}$, care are următoarele caracteristici:

- direcţia este perpendiculară pe direcţiile vectorilor $\vec{a}$ şi $\vec{b}$, deci pe planul determinat de reprezentanţii celor doi vectori cu originea în acelaşi punct;
- sensul este dat de "regula burghiului", adică este sensul de înaintare a unui burghiu atunci când se roteşte $\vec{a}$ peste $\vec{b}$ pe drumul cel mai scurt (cu unghiul de rotaţie $\theta \in (0,\pi)$).
- norma este dată de formula $\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \sin\theta$.

Dacă vectorii $\vec{a}, \vec{b}$ sunt coliniari sau cel puţin unul dintre ei este nul, atunci prin definiţie

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}.$$



Proprietăţile algebrice ale produsului vectorial:

1) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}, \forall \vec{a}, \vec{b} \in V_3$ - produsul vectorial este anticomutativ;

2) $\lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda\vec{b}), \forall \lambda \in R$;

3) $\vec{a} \times (\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$ şi $(\vec{b}+\vec{c}) \times \vec{a} = \vec{b} \times \vec{a} + \vec{c} \times \vec{a}, \forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V_3$ - produsul vectorial este distributiv la dreapta şi la stânga faţă de adunarea vectorilor.

Proprietăţile geometrice ale produsului vectorial:

1) Doi vectori nenuli sunt *coliniari* dacă şi numai dacă produsul lor vectorial este egal cu vectorul nul.

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}.$$

2) Norma produsului vectorial este egală cu aria paralelogramului determinat de cei doi vectori.

Expresia analitică a produsului vectorial:

Dacă vectorii $\vec{a}, \vec{b}$ au în baza canonică $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ scrierile

$$\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}, \quad \vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k},$$

atunci expresia analitică a produsului vectorial se calculează cu ajutorul determinantului simbolic

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Dezvoltarea acestui determinant se face întotdeauna după prima linie, deci

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\vec{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{k}.$$

Aplicaţiile produsului vectorial:

1) Coliniaritatea a trei puncte distincte A,B,C: $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \vec{0}$.

2) Aria paralelogramului determinat de doi vectori nenuli $\vec{a}$ şi $\vec{b}$: $S = \|\vec{a} \times \vec{b}\|$.

3) Aria triunghiului ABC: $S[ABC] = \frac{1}{2} \cdot \left\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right\|$.

1. Demonstraţi egalitatea: $(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 + (\vec{a} \times \vec{b})^2 = \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2$.

2. Calculaţi aria paralelogramului determinat de vectorii $\vec{v} = \vec{a} + 2\vec{b}$, $\vec{w} = -3\vec{a} + \vec{b}$, ştiind că $\|\vec{a}\| = 3$, $\|\vec{b}\| = 6$ şi $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{6}$.

Soluţie. Aria paralelogramului determinat de vectorii $\vec{v}$ şi $\vec{w}$ este $S = \|\vec{v} \times \vec{w}\|$. Calculăm $\vec{v} \times \vec{w}$ ţinând seama de proprietăţile algebrice ale produsului vectorial:

$$\vec{v} \times \vec{w} = (\vec{a} + 2\vec{b}) \times (-3\vec{a} + \vec{b}) = -3\underbrace{\vec{a} \times \vec{a}}_{\vec{0}} + \vec{a} \times \vec{b} - 6\underbrace{\vec{b} \times \vec{a}}_{-\vec{a}\times\vec{b}} + 2\underbrace{\vec{b} \times \vec{b}}_{\vec{0}} = 7\vec{a} \times \vec{b}.$$

Atunci $S = \|7\vec{a} \times \vec{b}\| = 7\|\vec{a} \times \vec{b}\| = 7 \cdot \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \sin(\vec{a}, \vec{b}) = 7 \cdot 3 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} = 63$.

3. Se dau vectorii liberi $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ despre care se ştie că $\|\vec{a}\| = 3$, $\|\vec{b}\| = 2$ şi $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 60°$. Se consideră apoi vectorii $\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$ şi $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b}$. Calculaţi:

a) $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\|\vec{c}\|$, $\angle(\vec{a}, \vec{c})$.

b) Aria paralelogramului determinat de vectorii $\vec{c}$ şi $\vec{d}$.

Soluţie. a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 3 \cdot 2 \cdot \cos 60° = 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 3$.

$$\|\vec{c}\| = \sqrt{\vec{c} \cdot \vec{c}} = \sqrt{(2\vec{a} - 3\vec{b}) \cdot (2\vec{a} - 3\vec{b})} = \sqrt{4\vec{a} \cdot \vec{a} - 12\vec{a} \cdot \vec{b} + 9\vec{b} \cdot \vec{b}} =$$

$$= \sqrt{4\|\vec{a}\|^2 - 12\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) + 9\|\vec{b}\|^2} = \sqrt{4 \cdot 9 - 12 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} + 9 \cdot 4} = \sqrt{36} = 6.$$

$$\cos(\vec{a}, \vec{c}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{c}}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{c}\|} = \frac{\vec{a} \cdot (2\vec{a} - 3\vec{b})}{3 \cdot 6} = \frac{2\|\vec{a}\|^2 - 3\vec{a} \cdot \vec{b}}{18} = \frac{2 \cdot 3^2 - 3 \cdot 3}{18} = \frac{9}{18} = \frac{1}{2},$$

deci $\angle(\vec{a}, \vec{c}) = 60°$.

b) Avem $\vec{c} \times \vec{d} = (2\vec{a} - 3\vec{b}) \times (\vec{a} + \vec{b}) = 2\vec{a} \times a - 3\vec{b} \times \vec{a} + 2\vec{a} \times \vec{b} - 3\vec{b} \times \vec{b} = 5\vec{a} \times \vec{b}$.

Atunci aria paralelogramului determinat de vectorii $\vec{c}$ şi $\vec{d}$ este:

$$S = \|\vec{c} \times \vec{d}\| = 5\|\vec{a} \times \vec{b}\| = 5 \cdot \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \sin(\vec{a}, \vec{b}) = 5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \sin 60° = 15\sqrt{3}.$$

4. Se dau vectorii $\vec{a} = 3\vec{m} - 2\vec{n}$ şi $\vec{b} = \vec{m} + 2\vec{n}$, unde $\vec{m}$ şi $\vec{n}$ sunt doi vectori liberi cu $\|\vec{m}\| = 1$, $\|\vec{n}\| = 2$, $\angle(\vec{m}, \vec{n}) = \frac{\pi}{3}$. Calculaţi aria paralelogramului determinat de vectorii $\vec{a}$ şi $\vec{b}$, lungimile diagonalelor acestui paralelogram şi unghiul dintre ele.
Răspuns. Aria paralelogramului: $S = \|\vec{a} \times \vec{b}\| = 8\|\vec{m} \times \vec{n}\| = 8\sqrt{3}$. Diagonalele sunt: $\vec{d}_1 = \vec{a} + \vec{b} = 4\vec{m}$, $\vec{d}_2 = \vec{a} - \vec{b} = 2\vec{m} - 4\vec{n}$. Lungimile lor şi unghiul dintre ele:

$$\|\vec{d}_1\| = 4,\ \|\vec{d}_2\| = 2\sqrt{13},\ \cos(\vec{d}_1, \vec{d}_2) = -\frac{1}{\sqrt{13}}.$$

5. Se dau vectorii $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$. Calculaţi:
   a) Norma produsului vectorial $\vec{a} \times \vec{b}$.
   b) Măsurile unghiurilor pe care le face produsul vectorial $\vec{a} \times \vec{b}$ cu fiecare din axele de coordonate *Ox*, *Oy*, *Oz*.

Răspuns. a) $\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|-7\vec{i} + 4\vec{j} + 13\vec{k}\| = 3\sqrt{26}$;

b) $\cos\alpha = -\frac{7}{3\sqrt{26}}$, $\cos\beta = \frac{4}{3\sqrt{26}}$, $\cos\gamma = \frac{13}{3\sqrt{26}}$.

6. Determinaţi scalarii $\lambda, \mu \in R$ astfel încât punctele $A(2, \lambda, 1)$, $B(3,7,5)$, $C(\mu, 10, 9)$ fie coliniare.
Răspuns. $\lambda = 4, \mu = 4$.

7. Se consideră punctele A(-1,1,2), B(2,3,-1), C(1,-2,0).
   a) Calculaţi aria triunghiului ABC, măsura unghiului A şi distanţa de la punctul A la dreapta BC.
   b) Determinaţi un vector perpendicular pe planul ABC de normă egală cu $26\sqrt{2}$.

Soluţie. a) Avem $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} + (z_B - z_A)\vec{k} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$ şi $\overrightarrow{AC} = 2\vec{i} - 3\vec{j} - 2\vec{k}$, $\overrightarrow{BC} = -\vec{i} - 5\vec{j} + \vec{k}$.

Atunci
$$\|\overrightarrow{AB}\| = \|3\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}\| = \sqrt{3^2 + 2^2 + (-3)^2} = \sqrt{22},$$
$$\|\overrightarrow{AC}\| = \|2\vec{i} - 3\vec{j} - 2\vec{k}\| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + (-2)^2} = \sqrt{17},$$
$$\|\overrightarrow{BC}\| = \|-\vec{i} - 5\vec{j} + \vec{k}\| = \sqrt{(-1)^2 + (-5)^2 + 1^2} = \sqrt{27}.$$

Apoi
$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & -2 \end{vmatrix} = -13\vec{i} - 13\vec{k} = -13(\vec{i} + \vec{k}).$$

Aria triunghiului ABC: $S[ABC] = \frac{1}{2} \cdot \left\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right\| = \frac{1}{2} \cdot \|-13(\vec{i} + \vec{j})\| = \frac{13 \cdot \sqrt{2}}{2}$.

$$\cos A = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\| \cdot \|\overrightarrow{AC}\|} = \frac{(3\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}) \cdot (2\vec{i} - 3\vec{j} - 2\vec{k})}{\sqrt{22} \cdot \sqrt{17}} =$$

$$= \frac{3 \cdot 2 + 2 \cdot (-3) + (-3) \cdot (-2)}{\sqrt{22} \cdot \sqrt{17}} = \frac{6}{\sqrt{22} \cdot \sqrt{17}}.$$

Distanţa de la punctul A la dreapta BC este înălţimea din A în triunghiul ABC. Atunci $\mathrm{dist}(A, BC) = \frac{2 \cdot S[ABC]}{\|\overrightarrow{BC}\|} = \frac{13\sqrt{2}}{\sqrt{27}}$.

b) Un vector perpendicular pe planul ABC este coliniar cu produsul vectorial $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$, prin urmare $\vec{v} = \lambda(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC})$, $(\lambda \in R)$. Din ipoteza $\|\vec{v}\| = 26\sqrt{2}$ rezultă $|\lambda| = 2$. Deci $\vec{v} = \pm 26(\vec{i} + \vec{k})$.

8. Demonstraţi că punctele A(2,4,1), B(3,7,5), C(4,10,9) sunt coliniare.

Indicaţie. Se arată că $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \vec{0}$.

9. Fie vectorii $\vec{u} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{v} = 2\vec{i} + \lambda\vec{j} + \mu\vec{k}$, $\vec{w} = 7\vec{i} - 11\vec{j} - \vec{k}$, unde $\lambda, \mu \in R$. Determinaţi mulţimea vectorilor $\vec{v}$, astfel încât vectorul $\vec{u} \times \vec{v}$ să fie coliniar cu $\vec{w}$.
Indicaţie. Scriind că $\vec{u} \times \vec{v}$ este coliniar cu $\vec{w}$, rezultă un sistem nedeterminat care se reduce la $11\lambda + \mu = 14$. Deci $\vec{v} = 2\vec{i} + \lambda\vec{j} + (14 - 11\lambda)\vec{k}, \lambda \in R$. Din punct de vedere geometric, mulţimea vectorilor $\vec{v}$ astfel determinaţi reprezintă un plan perpendicular pe $\vec{w}$ (ceea ce rezultă din egalitatea $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$).

10. Fie vectorul $\vec{v}$ perpendicular pe vectorii $\vec{a} = 4\vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k}$ şi $\vec{b} = \vec{j} + 3\vec{k}$. Ştiind că $\|\vec{v}\| = 26$ şi că $\vec{v}$ face un unghi obtuz cu axa *Oy*, determinaţi expresia analitică a vectorului $\vec{v}$.
Soluţie. Dacă $\vec{v} \perp \vec{a}, \vec{b}$, atunci $\vec{v}$ este coliniar cu $\vec{a} \times \vec{b}$. Prin urmare $\vec{v} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$, $(\lambda \in R)$. Condiţia $\|\vec{v}\| = 26$ sau $|\lambda| \cdot \|-3\vec{i} - 12\vec{j} + 4\vec{k}\| = 26$, conduce la $|\lambda| = 2$. Vectorul $\vec{v}$ face un unghi obtuz cu axa *Oy* dacă componenta sa pe $\vec{j}$ este negativă. Pentru aceasta trebuie ca $\lambda = 2$. Deci $\vec{v} = -6\vec{i} - 24\vec{j} + 8\vec{k}$.

11. Se dau vectorii $\vec{a} = \vec{j} + \vec{k}$ şi $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$. Calculaţi lungimile laturilor, lungimile diagonalelor şi aria paralelogramului determinat de cei doi vectori. Ce se poate spune despre forma acestui paralelogram?
Răspuns. $\|\vec{a}\| = \sqrt{2}$, $\|\vec{b}\| = \sqrt{3}$, $\|\vec{d}_1\| = \sqrt{5}$, $\|\vec{d}_2\| = \sqrt{5}$, $S = \sqrt{6}$. Paralelogramul este un dreptunghi.

12. Fie vectorii $\vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$ şi $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$. Calculaţi sinusul unghiului dintre diagonalele paralelogramului construit pe vectorii $\vec{a}$ şi $\vec{b}$.

Răspuns. $\sin(\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{b}) = \frac{1}{5}\sqrt{\frac{724}{29}}$.

13. Pe axele de coordonate *Ox*, *Oy*, *Oz* se iau segmente egale cu 1, 2, respectiv 3, măsurate de la origine. Calculaţi aria triunghiului obţinut prin unirea acestor puncte.

Răspuns. $S = \frac{7}{2}$.

§5. PRODUSUL MIXT

Se numeşte *produs mixt* al vectorilor $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V_3$, în această ordine, numărul real (scalarul) notat $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$, definit prin

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}).$$

<u>Expresia analitică a produsului mixt</u>

Dacă $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$, $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$, $\vec{c} = c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k}$, atunci

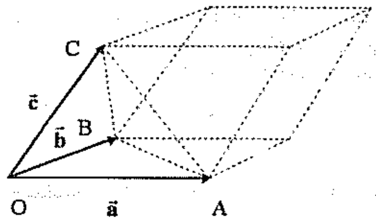
$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

<u>Proprietăţile algebrice ale produsului mixt</u>

1) Dacă în produsul mixt se schimbă ordinea a doi factori acesta îşi schimbă (doar) semnul. De exemplu: $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = -(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c})$.
2) Cu cei trei vectori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ se pot forma 6 produse mixte, toate egale în valoare absolută, trei având semnul "+" iar trei semnul "-":
$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}) = \mu,$$
$$(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}) = (\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}) = -\mu.$$
3) $\lambda(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\lambda\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \lambda\vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{b}, \lambda\vec{c}), \quad \forall \lambda \in R$.
4) Produsul mixt nu se schimbă dacă se permută între ele cele două tipuri de produse, adică
$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}.$$

<u>Proprietăţile geometrice ale produsului mixt</u>

1) Trei vectori nenuli sunt *coplanari* dacă şi numai dacă produsul lor mixt este nul.
2) Dacă $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sunt trei vectori nenuli şi necoliniari doi câte doi, atunci modulul produsului mixt este egal cu volumul paralelipipedului (eventual degenerat) determinat de cei trei vectori.



<u>Aplicaţiile produsului mixt</u>

1) Coplanaritatea a trei vectori nenuli $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$:
$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0.$$
2) Coplanaritatea a patru puncte A,B,C,D, distincte două câte două:
$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = 0.$$

3) Volumul paralelipipedului determinat de trei vectori nenuli şi necoliniari doi câte doi:
$$V = |(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|.$$
4) Volumul tetraedrului OABC: $V[OABC] = \frac{1}{6} \cdot \left|\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\right)\right|$.

1. Vectorul $\vec{c}$ este perpendicular pe vectorii $\vec{a}$ şi $\vec{b}$, care formează între ei un unghi de 30°. Calculaţi produsul mixt $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ dacă $\|\vec{a}\| = 6$, $\|\vec{b}\| = 3$, $\|\vec{c}\| = 4$.

Soluţie. Deoarece vectorul $\vec{c}$ este perpendicular pe $\vec{a}$ şi $\vec{b}$, $\vec{c}$ este coliniar cu $\vec{a} \times \vec{b}$. Există atunci $\lambda \in R$ astfel ca $\vec{c} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$. Din egalitatea $\|\vec{c}\| = \|\lambda(\vec{a} \times \vec{b})\|$, sau $4 = |\lambda| \cdot \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \sin 30^\circ$, rezultă $\lambda = \pm\frac{4}{9}$. Atunci avem
$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})^2 = \lambda\|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 = \pm\frac{4}{9} \cdot 9^2 = \pm 36.$$

2. Calculaţi volumul paralelipipedului construit pe vectorii
$$\vec{u} = 2\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}, \quad \vec{v} = \vec{a} - \vec{c}, \quad \vec{w} = \vec{b} + \vec{c}$$
ştiind că $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V_3$, $\|\vec{a}\| = 1$, $\|\vec{b}\| = 2$, $\|\vec{c}\| = 3$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$, $\angle(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}) = 60^\circ$.

Soluţie. $V = |(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})| = 4|(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})| = 4|(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}| = 4\|\vec{a} \times \vec{b}\| \cdot \|\vec{c}\| \cdot \cos(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}) =$
$= 4\left(\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \sin(\vec{a}, \vec{b})\right) \cdot \|\vec{c}\| \cdot \cos(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}) = 12$.

3. Demonstraţi că oricare ar fi trei vectori necoplanari $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vectorii $\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{b} - \vec{c}$, $\vec{c} - \vec{a}$ sunt coplanari.

Indicaţie. Se arată că produsul mixt $(\vec{a} - \vec{b}, \vec{b} - \vec{c}, \vec{c} - \vec{a}) = 0$.

4. Demonstraţi că dacă este adevărată egalitatea $\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a} = \vec{0}$, atunci vectorii $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sunt coplanari.

Indicaţie. Se înmulţeşte scalar relaţia din ipoteză cu $\vec{a}$ şi rezultă $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$.

5. Se dau vectorii $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{c} = -\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$. Calculaţi volumul paralelipipedului determinat de cei trei vectori şi înălţimea sa corespunzătoare bazei construită pe vectorii $\vec{a}$ şi $\vec{b}$.

Soluţie. $V = 4$, $h = \sqrt{2}$.

6. Calculaţi volumul tetraedrului care are vârfurile în punctele A(0,0,1), B(2,3,5), C(6,2,3), D(3,7,2).

Răspuns: 20.

7. Demonstraţi că punctele A(1,2,-1), B(0,1,5), C(-1,2,1), D(2,1,3) sunt coplanare.

Indicaţie: Se arată că produsul mixt $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = 0$.

8. Se consideră punctele:

1) A(2,3,1), B(4,1,-2), C(6,3,7), D(-5,-4,8);
2) A(1,1,-3), B(2,-1,1), C(3,3,1), D(-1,4,2);
3) A(2,-1,1), B(5,5,4), C(3,2,-1), D(4,1,3).

Pentru fiecare din cazurile de mai sus, calculaţi:

a) Perimetrul şi aria triunghiului ABC, măsura unghiului din A şi distanţa de la punctul C la dreapta AB.
b) Volumul tetraedrului ABCD şi distanţa de la punctul D la planul ABC.

Soluţie. 1) a) Avem $\overrightarrow{AB}=2\vec{i}-2\vec{j}-3\vec{k}$, $\overrightarrow{AC}=4\vec{i}+6\vec{k}$, $\overrightarrow{BC}=2\vec{i}+2\vec{j}+9\vec{k}$ şi

$\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{2^2+(-2)^2+(-3)^2}=\sqrt{17}$, $\|\overrightarrow{AC}\|=\sqrt{4^2+6^2}=\sqrt{52}$,

$\|\overrightarrow{BC}\|=\sqrt{2^2+2^2+9^2}=\sqrt{89}$

Calculăm produsul vectorial $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -2 & -3\\ 4 & 0 & 6\end{vmatrix}=-4(3\vec{i}+6\vec{j}-2\vec{k})$ şi norma

sa $\left\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right\|=|-4|\cdot\|3\vec{i}+6\vec{j}-2\vec{k}\|=4\sqrt{49}=28$. Atunci avem:

- perimetrul triunghiului ABC: $P[ABC]=\|\overrightarrow{AB}\|+\|\overrightarrow{AC}\|+\|\overrightarrow{BC}\|=\sqrt{17}+\sqrt{52}+\sqrt{89}$
- aria triunghiului ABC: $S[ABC]=\frac{1}{2}\cdot\left\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right\|=\frac{1}{2}\cdot 28=14$.
- $\cos A=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\|\cdot\|\overrightarrow{AC}\|}=\dfrac{2\cdot4+(-2)\cdot0+(-3)\cdot6}{\sqrt{17}\cdot\sqrt{52}}=\dfrac{-10}{\sqrt{884}}$.
- $\mathrm{dist}(C,AB)=\dfrac{2\cdot S[ABC]}{\|\overrightarrow{AB}\|}=\dfrac{2\cdot14}{\sqrt{17}}$.

b) Pentru calculul volumului tetraedrului ABCD se determină şi vectorul $\overrightarrow{AD}=-7\vec{i}-7\vec{j}+7\vec{k}=-7(\vec{i}+\vec{j}-\vec{k})$. Avem

$$V[ABCD]=\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)\right|=\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AD}\right|=$$

$$=\frac{1}{6}\left|-4(3i+6j-2k)\cdot(-7)(\vec{i}+\vec{j}-\vec{k})\right|=\frac{1}{6}\cdot28\cdot|3\cdot1+6\cdot1+(-2)\cdot(-1)|=\frac{154}{3}.$$

Distanţa de la punctul D la planul ABC este lungimea înălţimii din D a tetraedrului ABCD. Deci $\mathrm{dist}(D,ABC)=\dfrac{3\cdot V[ABCD]}{S[ABC]}=\dfrac{154}{14}=11$.

2) $P[ABC]=\sqrt{21}+\sqrt{24}+\sqrt{17}$, $S[ABC]=\sqrt{77}$, $\cos A=\dfrac{14}{\sqrt{21}\sqrt{24}}$,

$\mathrm{dist}(C,AB)=\dfrac{2\sqrt{77}}{\sqrt{21}}$, $V[ABCD]=\dfrac{37}{3}$, $\mathrm{dist}(D,ABC)=\dfrac{37}{\sqrt{77}}$.

3) $P[ABC]=\sqrt{54}+\sqrt{14}+\sqrt{38}$, $S[ABC]=\frac{3}{2}\sqrt{59}$, $\cos A=\dfrac{5}{2\sqrt{21}}$,

$\mathrm{dist}(C,AB)=\dfrac{\sqrt{59}}{\sqrt{6}}$, $V[ABCD]=3$, $\mathrm{dist}(D,ABC)=\dfrac{6}{\sqrt{59}}$.

9. Se dau vectorii $\vec{a}=2\vec{i}+(\lambda+2)\vec{j}+3\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}+\lambda\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{c}=4\vec{j}+2\vec{k}$, unde $\lambda\in R$.

a) Determinaţi valoarea parametrului λ astfel încât vectorii să fie coplanari.
b) În acest caz, descompuneţi vectorul $\vec{a}$ după direcţiile vectorilor $\vec{b}$ şi $\vec{c}$ şi calculaţi aria paralelogramului determinat de vectorii $\vec{b}$ şi $\vec{c}$.

Răspuns. a) $\lambda=-8$; b) $\vec{a}=2\vec{b}+\frac{5}{2}\vec{c}$, $S=\sqrt{164}$.

§6. DUBLUL PRODUS VECTORIAL

Fie $\vec{a},\vec{b},\vec{c}\in V_3$. Se numeşte *dublul produs vectorial* al vectorilor $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ vectorul

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}).$$

Dublul produs vectorial $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ este un vector situat în planul determinat de vectorii $\vec{b}$ şi $\vec{c}$. Scrierea sa în funcţie de $\vec{b}$ şi $\vec{c}$ este dată de formula

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}.$$

Pentru reţinerea acesteia se foloseşte exprimarea sa cu ajutorul determinantului simbolic

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=\begin{vmatrix}\vec{b} & \vec{c}\\ \vec{a}\cdot\vec{b} & \vec{a}\cdot\vec{c}\end{vmatrix}.$$

<u>Proprietăţi</u>

$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{0}$ dacă şi numai dacă unul din vectorii $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ este nul sau $\vec{b}$ şi $\vec{c}$ sunt coliniari sau $\vec{a}$ este ortogonal pe $\vec{b}$ şi pe $\vec{c}$.

1. Se dau vectorii $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}\in V_3$. Demonstraţi că:

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})+\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a})+\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{0}.$$

2. Demonstraţi că pentru oricare patru vectori $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}\in V_3$ are loc egalitatea

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d})=\begin{vmatrix}\vec{a}\cdot\vec{c} & \vec{b}\cdot\vec{c}\\ \vec{a}\cdot\vec{d} & \vec{b}\cdot\vec{d}\end{vmatrix},$$

cunoscută sub numele de "identitatea lui Lagrange".

Soluţie. Notăm $\vec{v}=\vec{c}\times\vec{d}$. Atunci avem

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d})=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{v}=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{v})=\vec{a}\cdot[\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{d})]=\mathbf{a}\cdot\begin{vmatrix}\vec{c} & \vec{d}\\ \vec{b}\cdot\vec{c} & \vec{b}\cdot\vec{d}\end{vmatrix}=$$

$$=\vec{a}\cdot[(\vec{b}\cdot\vec{d})\vec{c}-(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{d}]=(\vec{b}\cdot\vec{d})(\vec{a}\cdot\vec{c})-(\vec{b}\cdot\vec{c})(\vec{a}\cdot\vec{d})=\begin{vmatrix}\vec{a}\cdot\vec{c} & \vec{b}\cdot\vec{c}\\ \vec{a}\cdot\vec{d} & \vec{b}\cdot\vec{d}\end{vmatrix}$$

3. Fie $\vec{a}$, $\vec{b}$ doi vectori liberi, $\vec{a} \neq \vec{0}$. Demonstraţi egalitatea

$$\vec{b} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\|^2}\vec{a} + \frac{1}{\|\vec{a}\|^2}\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{a})$$

şi daţi interpretarea sa geometrică.

Indicaţie. Relaţia de mai sus reprezintă formula descompunerii unui vector $\vec{b}$ după direcţia unui vector nenul $\vec{a}$ şi a unui alt vector perpendicular pe acesta.

4. Dacă $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c} \in V_3$, verificaţi egalităţile:

a) $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot [\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})] = -(\vec{a} \cdot \vec{b})(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$;

b) $(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{b} \times \vec{c}, \vec{c} \times \vec{a}) = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})^2$;

c) $\dfrac{(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{a} \times \vec{c})}{(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{b} \times \vec{c}, \vec{c} \times \vec{a})} = \dfrac{\vec{a}}{(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})}$;

Soluţie. a) Avem

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot [\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})] = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \begin{vmatrix} \vec{b} & \vec{c} \\ \vec{a} \cdot \vec{b} & \vec{a} \cdot \vec{c} \end{vmatrix} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot [(\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}] =$$

$$= (\vec{a} \cdot \vec{c})\underbrace{[(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{b}]}_{0} - (\vec{a} \cdot \vec{b})[(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}] = -(\vec{a} \cdot \vec{b})(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}).$$

b) $$(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{b} \times \vec{c}, \vec{c} \times \vec{a}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot [(\vec{b} \times \vec{c}) \times (\vec{c} \times \vec{a})] = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \begin{vmatrix} \vec{c} & \vec{a} \\ \underbrace{(\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{c}}_{0} & \underbrace{(\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a}}_{(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})} \end{vmatrix} =$$

$$= (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot [(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})\vec{c}] = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})[(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}] = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})^2.$$

5. Se dau vectorii $\vec{a} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j} + \gamma\vec{k}$, $\vec{b} = \beta\vec{i} + \gamma\vec{j} + \alpha\vec{k}$, $\vec{c} = \gamma\vec{i} + \alpha\vec{j} + \beta\vec{k}$. Arătaţi că vectorii $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ şi $\vec{b} - \vec{c}$ sunt coliniari.

Răspuns. $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)(\vec{b} - \vec{c})$.

6. Fie piramida regulată VABC în care $AB = BC = CA = a$ şi $VA = VB = VC = b$ $(b > a)$. Demonstraţi egalitatea:

$$\left(\overrightarrow{VA} \times \overrightarrow{VB}\right) \times \overrightarrow{VC} = \frac{2b^2 - a^2}{2}\overrightarrow{AB}.$$

Soluţie. Fie θ măsura unghiului din V al unei feţe laterale. Conform teoremei cosinusului, avem $\cos\theta = \dfrac{2b^2 - a^2}{2b^2}$. Atunci

$$\left(\overrightarrow{VA} \times \overrightarrow{VB}\right) \times \overrightarrow{VC} = \left(\overrightarrow{VA} \cdot \overrightarrow{VC}\right)\overrightarrow{VB} - \left(\overrightarrow{VB} \cdot \overrightarrow{VC}\right)\overrightarrow{VA} = b^2\cos\theta\left(\overrightarrow{VB} - \overrightarrow{VA}\right) =$$

$$= b^2\cos\theta\,\overrightarrow{AB} = b^2\,\frac{2b^2 - a^2}{2b^2}\,\overrightarrow{AB} = \frac{2b^2 - a^2}{2}\,\overrightarrow{AB}.$$

§7. VECTORI RECIPROCI

Fie $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ trei vectori necoplanari. Produsul lor mixt $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ este nenul şi cei trei vectori formează o bază a spaţiului V_3, denumită în continuare baza directă a spaţiului V_3. Considerăm vectorii

$$\vec{f}_1 = \frac{\vec{e}_2 \times \vec{e}_3}{(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)},\quad \vec{f}_2 = \frac{\vec{e}_3 \times \vec{e}_1}{(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)},\quad \vec{f}_3 = \frac{\vec{e}_1 \times \vec{e}_2}{(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)}.$$

1. Demonstraţi că mulţimea $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$ formează o bază a spaţiului V_3, (numită baza reciprocă bazei $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$).

Indicaţie. Se arată că $(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3) = \dfrac{1}{(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)}$, de unde rezultă că $(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3) \neq 0$, şi deci vectorii $\vec{f}_1$, $\vec{f}_2$, $\vec{f}_3$ sunt necoplanari.

2. Arătaţi că au loc relaţiile:

$$\begin{array}{lll} \vec{e}_1 \cdot \vec{f}_1 = 1 & \vec{e}_2 \cdot \vec{f}_1 = 0 & \vec{e}_3 \cdot \vec{f}_1 = 0 \\ \vec{e}_1 \cdot \vec{f}_2 = 0 & \vec{e}_2 \cdot \vec{f}_2 = 1 & \vec{e}_3 \cdot \vec{f}_2 = 0 \\ \vec{e}_1 \cdot \vec{f}_3 = 0 & \vec{e}_2 \cdot \vec{f}_3 = 0 & \vec{e}_3 \cdot \vec{f}_3 = 1 \end{array}$$

3. Demonstraţi afirmaţiile:

a) Dacă vectorul $\vec{a}$ are în baza directă $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ scrierea

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3,$$

atunci componentele lui în această bază sunt date de formulele

$$a_1 = \vec{a} \cdot \vec{f}_1,\quad a_2 = \vec{a} \cdot \vec{f}_2,\quad a_3 = \vec{a} \cdot \vec{f}_3.$$

Prin urmare, vectorul $\vec{a}$ are în baza directă scrierea

$$\vec{a} = (\vec{a} \cdot \vec{f}_1)\vec{e}_1 + (\vec{a} \cdot \vec{f}_2)\vec{e}_2 + (\vec{a} \cdot \vec{f}_3)\vec{e}_3.$$

b) Dacă vectorul $\vec{a}$ are în baza reciprocă $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$ scrierea,

$$\vec{a} = \lambda_1\vec{f}_1 + \lambda_2\vec{f}_2 + \lambda_3\vec{f}_3$$

atunci componentele lui în această bază sunt

$$\lambda_1 = \vec{a} \cdot \vec{e}_1,\quad \lambda_2 = \vec{a} \cdot \vec{e}_2,\quad \lambda_3 = \vec{a} \cdot \vec{e}_3.$$

Prin urmare, vectorul $\vec{a}$ are în baza reciprocă scrierea

$$\vec{a} = (\vec{a} \cdot \vec{e}_1)\vec{f}_1 + (\vec{a} \cdot \vec{e}_2)\vec{f}_2 + (\vec{a} \cdot \vec{e}_3)\vec{f}_3$$

4. Se dau vectorii $\vec{e}_1 = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{e}_2 = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{e}_3 = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$.

a) Demonstraţi că $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ constituie o bază pentru spaţiul vectorial V_3.

b) Determinaţi scrierea vectorului $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$ în baza directă $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ şi în baza reciprocă $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$.

Soluţie. a) Vectorii $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ sunt necoplanari deoarece $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = 2$. Prin urmare, $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ este o bază a spaţiului V_3.

b) Determinăm baza reciprocă

$$\vec{f}_1=\frac{\vec{e}_2\times\vec{e}_3}{(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{vmatrix}=\frac{1}{2}(\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}),$$

$$\vec{f}_2=\frac{\vec{e}_3\times\vec{e}_1}{(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & 2 & -1\end{vmatrix}=\frac{1}{2}(\vec{i}+\vec{k}),$$

$$\vec{f}_3=\frac{\vec{e}_1\times\vec{e}_2}{(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 2 & -1\\ 1 & -2 & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{2}(-2\vec{j}-4\vec{k})=-\vec{j}-2\vec{k}.$$

Componentele lui $\vec{a}$ în baza directă sunt:

$$a_1=\vec{a}\cdot\vec{f}_1=(2\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k})\cdot\frac{1}{2}(\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k})=\frac{1}{2}(2\cdot1+(-3)\cdot2+1\cdot3)=-\frac{1}{2},$$

$$a_2=\vec{a}\cdot\vec{f}_2=(2\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k})\cdot\frac{1}{2}(\vec{i}+\vec{k})=\frac{1}{2}(2\cdot1+(-3)\cdot0+1\cdot1)=\frac{3}{2},$$

$$a_3=\vec{a}\cdot\vec{f}_3=(2\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k})\cdot(-\vec{j}-2\vec{k})=2\cdot0+(-3)\cdot(-1)+1\cdot(-2)=1.$$

Deci scrierea lui $\vec{a}$ în baza directă este $\vec{a}=-\frac{1}{2}\vec{e}_1+\frac{3}{2}\vec{e}_2+\vec{e}_3$.

Componentele lui $\vec{a}$ în baza reciprocă sunt: $\lambda_1=\vec{a}\cdot\vec{e}_1=-5$, $\lambda_2=\vec{a}\cdot\vec{e}_2=9$, $\lambda_3=\vec{a}\cdot\vec{e}_3=-2$. Atunci scrierea lui $\vec{a}$ în baza reciprocă este $\vec{a}=-5\vec{f}_1+9\vec{f}_2-2\vec{f}_3$.

5. Se dau vectorii $\vec{e}_1=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{e}_2=\vec{i}-\vec{j}$, $\vec{e}_3=\vec{j}+2\vec{k}$ şi $\vec{a}=2\vec{i}+\vec{j}-3\vec{k}$.
   a) Demonstraţi că aceşti vectori sunt necoplanari şi determinaţi vectorii lor reciproci.
   b) Găsiţi descompunerea vectorului $\vec{a}$ după direcţiile vectorilor $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$.
   Răspuns. a) Vectorii sunt necoplanari deoarece $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)=-3$. Vectorii reciproci sunt $\vec{f}_1=\frac{1}{3}(2\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k})$, $\vec{f}_2=\frac{1}{3}(\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k})$, $\vec{f}_3=\frac{1}{3}(-\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k})$.
   b) $\vec{a}=3\vec{e}_1-\vec{e}_2-3\vec{e}_3$

6. Dacă $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ sunt trei vectori necoplanari şi $\vec{f}_1$, $\vec{f}_2$, $\vec{f}_3$ sunt vectorii lor reciproci, demonstraţi egalităţile:
   a) $\vec{e}_1\times\vec{f}_1+\vec{e}_2\times\vec{f}_2+\vec{e}_3\times\vec{f}_3=\vec{0}$;
   b) $(\vec{f}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)+(\vec{e}_1,\vec{f}_2,\vec{e}_3)+(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{f}_3)=(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)(\vec{f}_1^2+\vec{f}_2^2+\vec{f}_3^2)$;
   c) $(\vec{f}_1\times\vec{f}_2,\vec{f}_2\times\vec{f}_3,\vec{f}_3\times\vec{f}_1)=(\vec{f}_1,\vec{f}_2,\vec{f}_3)^{-1}(\vec{e}_1\times\vec{e}_2,\vec{e}_2\times\vec{e}_3,\vec{e}_3\times\vec{e}_1)$;
   d) $[\vec{e}_1\times(\vec{e}_2\times\vec{e}_3)][\vec{f}_1\times(\vec{f}_2\times\vec{f}_3)]=(\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2)(\vec{f}_1\cdot\vec{f}_2)+(\vec{e}_1\cdot\vec{e}_3)(\vec{f}_1\cdot\vec{f}_3)$.

CAPITOLUL III

SPAŢII VECTORIALE

§1. DEFINIŢIA SPAŢIULUI VECTORIAL. BAZE. DIMENSIUNE. SUBSPAŢII VECTORIALE. SUME ŞI INTERSECŢII DE SUBSPAŢII VECTORIALE.

Fie K un corp comutativ şi V un spaţiu vectorial peste corpul K. Elementele lui K (scalarii) vor fi notate cu a, b, c, ..., iar elementele lui V (vectorii) vor fi notate cu A, B, C, ...

O mulţime de vectori $S=\{X_1, ..., X_n\}$ din V va fi numită *sistem de generatori pentru V* peste corpul K dacă orice element X din V se poate reprezenta sub forma $X=x_1X_1+...+x_nX_n$. O mulţime de vectori $S=\{X_1, ..., X_k\}$ din V va fi numită *sistem liniar independent în V* dacă din egalitatea : $x_1X_1+...+x_kX_k=0$ rezultă cu necesitate că $x_1=x_2=...=x_k=0$. În caz contrar S se va numi sistem de vectori liniar dependent.

O mulţime de vectori $S=\{X_1, ..., X_n\}$ din V care este sistem liniar independent în V şi sistem de generatori pentru V va fi numită *bază* a lui V (peste K). Oricare două baze ale lui V au acelaşi număr de elemente, număr care se numeşte *dimensiunea spaţiului vectorial* V peste corpul K şi o vom nota cu $dim_K V$ sau simplu cu *dim*V. Când acest număr există (este finit) se spune că V *are dimensiunea finită peste* K.

Fie $V_1, ..., V_k$ subspaţii vectoriale în V. Subspaţiul vectorial {X în V cu $X=X_1+...+X_k$, unde X_i este în V_i } va fi numit *suma subspaţiilor vectoriale* $V_1, ..., V_k$ şi va fi notat prin $V_1+...+V_k$. Suma $U=V_1+...+V_k$ va fi numită *directă* dacă orice vector X din U se poate reprezenta *în mod unic* sub forma $X=X_1+...+X_k$, cu X_i în V_i, pentru orice i.

Cu notaţiile de mai sus are loc egalitatea : $dim(V_1+V_2)=dim\,V_1+dim\,V_2-dim(V_1\cap V_2)$ şi teorema: $U=V_1+...+V_k$ este sumă directă dacă şi numai dacă $dim\,U=dim\,V_1+...+dim\,V_k$. Fie $S=\{X_1, ..., X_n\}$, $S'=\{X'_1, ..., X'_n\}$ două baze de vectori în V. Matricea $C=(c_{ij})$, i, j = 1, ..., n, definită prin relaţiile $X'_i=\sum_{j=1}^{n}c_{ji}X_j$, i = 1, ..., n va fi numită *matricea de trecere de la baza S la baza S'*. Fie $X\in V$ şi S, S' bazele de mai sus. Dacă reprezentăm pe X în cele două baze : $X=x_1X_1+...+x_nX_n=x'_1X'_1+...+x'_nX'_n$,

atunci $\begin{pmatrix}x'_1\\ \vdots\\ x'_n\end{pmatrix}=C^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$, C fiind matricea de trecere de la baza S la baza S'.

1. Fie **R** corpul numerelor reale. Care din următoarele submulţimi sunt subspaţii vectoriale în $\mathbf{R}^3$?

a) Mulţimea vectorilor $X = (x_1, x_2, x_3)$ cu prima componentă $x_1 = 0$.

b) Mulţimea vectorilor $X = (x_1, x_2, x_3)$ cu prima componentă $x_1 = 1$.

c) Mulţimea vectorilor $X = (x_1, x_2, x_3)$ cu $x_1x_2 = 0$ (reuniunea planelor $x_1 = 0$ şi $x_2 = 0$).

d) Mulţimea formată din vectorul $X = (0, 0, 0)$.

e) Mulţimea formată din toate combinaţiile liniare cu vectorii $U = (1, 1, 0)$ şi $V = (2, 0, 1)$.

f) Mulţimea vectorilor $X = (x_1, x_2, x_3)$ cu $x_3 - x_2 + 3x_1 = 0$.

g) Mulţimea vectorilor $X = (x_1, x_2, x_3)$ cu $x_1 + x_2 + x_3 = 1$.

Soluţie. a) Este suficient să arătăm că suma a doi vectori din mulţimea indicată este încă un vector în această mulţime şi că produsul unui vector din mulţime cu un scalar real este încă un vector în mulţimea respectivă. Fie $X = (0, x_2, x_3)$, $Y = (0, y_2, y_3)$ şi $\lambda \in \mathbf{R}$. Avem că $X + Y = (0, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$ şi $\lambda \cdot X = (0, \lambda x_2, \lambda x_3)$. Deci mulţimea indicată este subspaţiu vectorial în $\mathbf{R}^3$.

b) Să observăm că vectorul nul (0, 0, 0) nu aparţine mulţimii, deci nu putem avea un subspaţiu vectorial.

c) Nu este subspaţiu vectorial în $\mathbf{R}^3$ deoarece suma a doi vectori din planele $x_1 = 0$ si $x_2 = 0$ nu aparţine în general la niciunul din ele. Exemplu: $(0, 1, 0) + (1, 0, 0) = (1, 1, 0)$.

d) Este subspaţiu vectorial în $\mathbf{R}^3$ deoarece $(0, 0, 0) + (0, 0, 0) = (0, 0, 0)$ şi $\lambda\cdot(0, 0, 0) = (0, 0, 0)$.

e) Mulţimea respectivă este $\{xU + yV \mid x, y \in \mathbf{R}\}$. Este clar că suma a două elemente de formă $xU + yV$ este încă un element de această formă. Produsul cu un scalar, la fel.

f) Fie $X = (x_1, x_2, x_3)$, $Y = (y_1, y_2, y_3)$ cu $x_3 - x_2 + 3x_1 = 0$ si $y_3 - y_2 + 3y_1 = 0$. Avem $X + Y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$ şi $(x_3 + y_3) - (x_2 + y_2) + 3(x_1 + y_1) = 0$. Pentru $\lambda \in \mathbf{R}$, $\lambda X = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)$ şi $\lambda x_3 - \lambda x_2 + 3\lambda x_1 = 0$. Deci mulţimea indicată este subspaţiu vectorial în $\mathbf{R}^3$. În general, mulţimea vectorilor din orice plan care trece prin origine constituie un subspaţiu vectorial în $\mathbf{R}^3$.

g) Nu este subspaţiu vectorial în $\mathbf{R}^3$ deoarece (0, 0, 0) nu aparţine mulţimii.

2. Să se arate că mulţimea vectorilor $X = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$ care se găsesc pe o dreaptă ce trece prin origine formează un subspaţiu vectorial real în $\mathbf{R}^3$. Dacă dreapta nu trece prin origine ce putem spune?

Indicaţie. Vezi 1.

Răspuns: Nu formează spaţiu vectorial.

3. Să se arate că toate subspaţiile vectoriale de dimensiune 2 din $\mathbf{R}^3$ sunt planele care trec prin origine. Care sunt subspaţiile vectoriale de dimensiune 1 din $\mathbf{R}^3$?

Indicaţie. Fie V un subspaţiu vectorial de dimensiune 2 din $\mathbf{R}^3$ şi $\{U, V\}$ o bază în V. Vectorii U şi V nu pot fi coliniari deci determină un plan.

Răspuns: Dreptele care trec prin origine sunt toate subspaţiile de dimensiune 1 din $\mathbf{R}^3$.

4. Cu ajutorul proiecţiei stereografice putem să introducem pe sfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ din care scoatem polul nord (vectorul (0, 0, R)) o structură de spaţiu vectorial real. Să se arate că acest spaţiu nu poate fi subspaţiu vectorial în $\mathbf{R}^3$.

Indicaţie. Suma a doi vectori cu extremităţile pe sferă (efectuată în $\mathbf{R}^3$) nu mai este un vector cu extremitatea pe sferă.

5. Fie vectorii $V_1 = (1, 1, 0, 0)$, $V_2 = (1, 0, 1, 0)$, $V_3 = (0, 0, 1, 1)$, $V_4 = (0, 1, 0, 1)$ în $\mathbf{R}^4$. Sunt aceşti vectori liniar independenţi? Constituie ei o bază în $\mathbf{R}^4$? Care este subspaţiul vectorial din $\mathbf{R}^4$ generat de ei şi ce dimensiune are acesta?

Soluţie. Fie combinaţia $x_1V_1 + x_2V_2 + x_3V_3 + x_4V_4 = 0$, sau $(x_1 + x_2, x_1 + x_4, x_2 + x_3, x_3 + x_4) = (0, 0, 0, 0)$. De aici găsim sistemul de ecuaţii liniare în x_1, x_2, x_3, x_4: $x_1 + x_2 = 0$, $x_1 + x_4 = 0$, $x_2 + x_3 = 0$, $x_3 + x_4 = 0$. Acest sistem are o infinitate de soluţii şi anume

(1) $\quad x_1 = \lambda,\ x_2 = -\lambda,\ x_3 = \lambda,\ x_4 = -\lambda$, cu $\lambda \in \mathbf{R}$.

Deci vectorii V_1, V_2, V_3, V_4 *nu* sunt liniar independenţi în $\mathbf{R}^4$ şi deci nu pot constitui o bază în $\mathbf{R}^4$ (*dim* $\mathbf{R}^4 = 4$). Putem lua $\lambda = 1$, de exemplu, şi atunci $V_1 = V_2 - V_3 + V_4$, adică V_1 aparţine subspaţiul generat de V_2, V_3, V_4. Sunt V_2, V_3, V_4 liniar independenţi? Să vedem dacă sunt! Fie combinaţia $x_2V_2 + x_3V_3 + x_4V_4 = 0$ sau $(x_2, x_4, x_2 + x_3, x_3 + x_4) = (0, 0, 0, 0)$ de unde $x_2 = x_3 = x_4 = 0$. Deci V_2, V_3, V_4 sunt liniar independenţi şi formează o bază pentru subspaţiul generat de V_1, V_2, V_3, V_4, care are deci dimensiunea 3. Din acest ultim motiv şi din (1) rezultă că oricare trei vectori dintre vectorii V_1, V_2, V_3, V_4 pot constitui o bază pentru subspaţiul considerat.

6. Fie matricea $T = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$, a, b, c, d, e, f $\in \mathbf{R}$.

Să se arate că vectorii coloană (a, 0, 0), (b, d, 0), (c, e, f) sunt liniar dependenţi dacă şi numai dacă $a \cdot d \cdot f = 0$.

Indicaţie. Vezi definiţia sau faptul că vectorii coloană într–o matrice sunt liniar independenţi dacă şi numai dacă determinantul ei este nenul (pentru o matrice pătrată) sau, dacă şi numai dacă ea are rang maxim (pentru o matrice oarecare).

7. Fie V un spaţiu vectorial peste corpul K şi V_1, V_2, V_3 trei vectori liniar independenţi în V. Sunt vectorii $U_1 = V_1 + V_2$, $U_2 = V_1 + V_3$, $U_3 = V_2 + V_3$ liniar independenţi?

Indicaţie. Să considerăm $x_1U_1 + x_2U_2 + x_3U_3 = 0$ sau $x_1 + x_2 = 0$, $x_1 + x_3 = 0$, $x_2 + x_3 = 0$; sistemul acesta are soluţia banală numai dacă în corpul K nu pot avea $2\cdot 1 = 0$, adică dacă corpul K *nu are caracteristica 2*. De exemplu, corpul format cu elementele {0, 1} are caracteristica 2.

8. Fie matricea $U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Să se găsească o bază şi dimensiunea spaţiului vectorial real din $\mathbf{R}^4$ generat de vectorii coloană. Acelaşi lucru se cere şi pentru vectorii linie.

Răspuns: O bază este, de exemplu, $B = \{X_1, X_2\}$ cu $X_1 = (1, 0, 0, 0)$, $X_2 = (4, 2, 0, 0)$. Dimensiunea subspaţiului este 2. În cazul vectorilor linie, cu necesitate avem aceiaşi

dimensiune (= *rang* U) şi o bază este, de exemplu, $B' = \{X_1', X_2'\}$ cu $X_1' = (0, 1, 4, 3)$, $X_2' = (0, 0, 2, -2)$.

9. Găsiţi în $\mathbf{R}^3$ două baze distincte $S = \{X_1, X_2, X_3\}$, $S' = \{X_1, X_2, X'_3\}$.

Răspuns: Fie, de exemplu, $X_1 = \boldsymbol{i}$, $X_2 = \boldsymbol{j}$, $X_3 = \boldsymbol{k}$, $X_3' = 3\boldsymbol{k}$.

10. Fie V spaţiul vectorial al matricelor 3×3 de componente numere reale. Să se arate că cele 9 matrice $L_{ij} = \begin{array}{cc} & j \\ i & \begin{pmatrix} 0 & | & 0 \\ — & 1 & — \\ 0 & | & 0 \end{pmatrix} \end{array}$, i, j = 1, 2, 3 constituie o bază în V peste corpul numerelor reale. Care este dimensiunea subspaţiului vectorial al matricelor simetrice 3×3 în V?

Răspuns: 6. O bază este $\{L_{11}, L_{22}, L_{33}, L_{12} + L_{21}, L_{13} + L_{31}, L_{23} + L_{32}\}$.

11. Fie V un subspaţiu real şi $L_1, L_2, \dots, L_n$, $X\in V$. Să se arate că în fiecare din cazurile următoare $\{L_1, \dots, L_n\}$ formează o bază şi să se găsească coordonatele vectorului X în această bază:

a) $L_1 = (1, 1, 1)$, $L_2 = (1, 1, 2)$, $L_3 = (1, 2, 3)$; $X = (6, 9, 14)$; $V = \mathbf{R}^3$;

b) $L_1 = (2, 1, -3)$, $L_2 = (3, 2, -5)$, $L_3 = (1, -1, 1)$; $X = (6, 2, -7)$; $V = \mathbf{R}^3$;

c) $L_1 = (1, 2, -1, -2)$, $L_2 = (2, 3, 0, -1)$, $L_3 = (1, 2, 1, 4)$, $L_4 = (1, 3, -1, 0)$; $X = (7, 14, -1, 2)$; $V = \mathbf{R}^4$.

Indicaţie. a) Fie $x_1L_1 + x_2L_2 + x_3L_3 = 0$. Sistemul liniar în x_1, x_2, x_3 are numai soluţia banală $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, deci L_1, L_2, L_3 sunt liniar independenţi şi cum $V = \mathbf{R}^3$ ei formează o bază în V. Acum, $X = (6, 9, 14) = x_1(1, 1, 1) + x_2(1, 1, 2) + x_3(1, 2, 3)$. Găsim sistemul liniar: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 9 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14 \end{cases}$,

care admite soluţia $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$. Deci $X = L_1 + 2L_2 + 3L_3$ sau $X = (1, 2, 3)$ în baza $\{L_1, L_2, L_3\}$.

Răspuns: b) $X = L_1 + L_2 + L_3$; c) $X = 0\cdot L_1 + 2L_2 + L_3 + 2L_4$.

12. Care este matricea de trecere de la baza $L_1 = (1, 2, 1)$, $L_2 = (2, 3, 3)$, $L_3 = (3, 7, 1)$, la baza $L'_1 = (3, 1, 4)$, $L'_2 = (5, 2, 1)$, $L'_3 = (1, 1, -6)$ şi care sunt relaţiile dintre coordonatele unui vector $X\in\mathbf{R}^3$ scris în cele două baze?

Soluţie. Se verifică imediat că $\{L_1, L_2, L_3\}$ şi $\{L'_1, L'_2, L'_3\}$ formează două baze în $\mathbf{R}^3$. Prin definiţie matricea de trecere $C = (c_{i,j})_{\substack{i=1,3 \\ j=1,3}}$ se găseşte exprimând elementele "noii" baze în "vechea" bază.

$L'_1 = (3, 1, 4) = c_{11}(1, 2, 1) + c_{21}(2, 3, 3) + c_{31}(3, 7, 1)$,

$L'_2 = (5, 2, 1) = c_{12}(1, 2, 1) + c_{22}(2, 3, 3) + c_{32}(3, 7, 1)$,

$L'_3 = (1, 1, -6) = c_{13}(1, 2, 1) + c_{23}(2, 3, 3) + c_{33}(3, 7, 1)$.

Rezolvând cele 3 sisteme liniare care apar găsim: $C = \begin{pmatrix} -27 & -71 & -41 \\ 9 & 20 & 9 \\ 4 & 12 & 8 \end{pmatrix}$.

Relaţiile între coordonatele unui vector $X = (x_1, x_2, x_3) = (x'_1, x'_2, x'_3)$ în cele două baze sunt date de egalitatea: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = C\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}$.

13. Fie în $\mathbf{R}^4$ bazele $L_1 = (1, 1, 1, 1)$, $L_2 = (1, 2, 1, 1)$, $L_3 = (1,1,2,1)$, $L_4 = (1,3,2,3)$; $L'_1 = (1, 0, 3, 3)$, $L'_2 = (-2, -3, -5, -4)$, $L'_3 = (2, 2, 5, 4)$, $L'_4 = (-2, -3, -4, -4)$. Fie coordonatele vectorului X în prima bază $X = (1, 0, 0, 0)$. Care sunt coordonatele lui X în baza a doua?

Răspuns: Matricea de trecere este: $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = C\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{pmatrix} = C^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

= prima coloană a lui C^{-1}.

14. Fie P_n spaţiul vectorial al polinoamelor reale în variabila t de grade $\leq n$. Să se arate că vectorii $L_1 = 1$, $L_2 = t$, ..., $L_{n+1} = t^n$ formează o bază în P_n peste $\mathbf{R}$. Dacă $a\in\mathbf{R}$ să se arate că $L'_1 = 1$, $L'_2 = t - a$, ..., $L'_{n+1} = (t - a)^n$ formează de asemenea o bază în P_n peste $\mathbf{R}$. Pentru n = 3 care este matricea de trecere de la prima bază la a doua? Fie $P = P_0\cup P_1\cup P_2\cup\dots\cup P_n\cup\dots$ Are P dimensiunea finită peste $\mathbf{R}$? De ce?

Indicaţie. Orice polinom de grad $\leq n$ se dezvoltă în serie Taylor în t = a şi se poate scrie deci ca combinaţie liniară de puteri ale lui t – a. Se ţine seama apoi că *dim* $P_n = n + 1$.

Răspuns: $\begin{pmatrix} 1 & -a & a^2 & -a^3 \\ 0 & 1 & -2a & 3a^2 \\ 0 & 0 & 1 & -3a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; Nu.

15. Fie V un spaţiu vectorial peste corpul K şi L_1, L_2, L_3 vectori în V. Cum trebuie să fie vectorii L_1, L_2, L_3 pentru ca vectorii $F_1 = L_1 + L_2 + L_3$, $F_2 = L_1 + L_2$, $F_3 = L_1 + L_3$ să fie liniar independenţi?

Răspuns: liniar independenţi. (Vezi matricea de trecere în subspaţiul generat de L_1, L_2, L_3).

16. În spaţiul liniar (vectorial) al soluţiilor sistemului: $\begin{cases} x - y - 3z - t = 0 \\ x + y + z - 3t = 0 \end{cases}$,

fie soluţiile $V_1 = (1, -2, 1, 0)$, $V_2 = (2, 1, 0, 1)$, $V_3 = (-4, -2, 0, -2)$, $V_4 = (4, 7, -2, 3)$.

Să se arate că: a) vectorii V_1, V_2 formează o bază. b) Să se exprime V_3 în această bază. c) V_1, V_3, V_4 pot fi liniar independenţi?

Răspuns: b) $V_3 = -2V_2$; c) Nu (dimensiunea spaţiului este 2).

17. Fie vectorii $X_1 = (2, 1, 3, 1)$, $X_2 = (1, 2, 0, 1)$, $X_3 = (-1, 1 - 3, 0)$ în $\mathbf{R}^4$. Să se determine dimensiunea subspaţiului generat de X_1, X_2, X_3 şi o bază a sa.

Răspuns: 2; $\{X_1, X_2\}$, de exemplu.

18. Să se arate că subspaţiul vectorial generat de $V_1 = (1, 3, 5)$, $V_2 = (6, 3, 2)$, $V_3 = (3, 1, 0)$ în $\mathbf{R}^3$ coincide cu întregul spaţiu $\mathbf{R}^3$.

Indicaţie. V_1, V_2, V_3 sunt liniar independenţi, iar $dim\ \mathbf{R}^3 = 3$.

19. Fie $V_1 = (2, 1, 3, -1)$, $V_2 = (-1, 1, -3, 1)$, $V_3 = (4, 5, 3, -1)$, $V_4 = (1, 5, -3, 1)$ în $\mathbf{R}^4$. Să se determine o bază a subspaţiului vectorial generat de aceşti vectori în $\mathbf{R}^4$.

Soluţie. $V_1 \neq 0$; este clar că nu există $a \in \mathbf{R}$ astfel încât $V_2 = a \cdot V_1$. V_3 aparţine subspaţiului generat de V_1 şi V_2? Altfel spus, există $a, b \in \mathbf{R}$ astfel încât $V_3 = a \cdot V_1 + b \cdot V_2$? Da, $a = 3$, $b = 2$. Rămâne acum să vedem dacă V_4 intră în acelaşi subspaţiu. Găsim că $V_4 = 2 \cdot V_1 + 3 \cdot V_2$. Deci $\{V_1, V_2\}$ este o bază a subspaţiului generat de V_1, V_2, V_3, V_4 în $\mathbf{R}^4$.

20. Fie $X_1 = (2, 0, 1, 3, -1)$, $X_2 = (1, 1, 0, -1, 1)$, $X_3 = (0, -2, 1, 5, -3)$, $X_4 = (1, -3, 2, 9, -5)$ vectori în $\mathbf{R}^5$. Să se determine dimensiunea subspaţiului generat de aceşti vectori în $\mathbf{R}^5$ şi o bază a sa.

Răspuns: 2; $\{X_1, X_2\}$ sau $\{X_1, X_3\}$ sau $\{X_2, X_3\}$, etc.

21. Să se arate că vectorii $L_1 = (1, 0, 0, 1)$, $L_2 = (0, 0, 0, 1)$, $L_3 = (1, -1, 1, -1)$, $L_4 = (1, -1, -1, 1)$ formează o bază în $\mathbf{R}^4$ şi să se exprime vectorul $X = (1, 0, 1, 1)$ în această bază.

Răspuns: $X = L_1 + L_2 + \frac{1}{2}L_3 - \frac{1}{2}L_4$.

22. În $\mathbf{R}^3$ fie bazele $S = \{L_1 = (1, 0, 0), L_2 = (0, 1, 0), L_3 = (0, 0, 1)\}$ şi $S' = \{L'_1 = (1, 0, 1), L'_2 = (1, 1, 0), L'_3 = (0, 1, 1)\}$. Să se găsească matricea de trecere de la baza S la baza S' şi matricea de trecere de la baza S' la baza S.

Soluţie. Fie $C = (c_{ij})_{i,j=1,2,3}$ matricea de trecere de la S la S'. Avem $L'_1 = L_1 + L_3$, $L'_2 = L_1 + L_2$, $L'_3 = L_2 + L_3$. Deci $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Matricea de trecere de la baza S' la baza S va fi:

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

23. Să se găsească matricea de trecere de la baza $\{L_1 = (1, 0, 1), L_2 = (0, 1, 1), L_3 = (1, 1, 1)\}$ la baza $\{L'_1 = (1, 1, 0), L'_2 = (-1, 0, 0), L'_3 = (0, 0, 1)\}$, în $\mathbf{R}^3$.

Răspuns: $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

24. Fie vectorul $X = x_1L_1 + x_2L_2 + x_3L_3$ exprimat în baza canonică $\{L_1 = (1, 0, 0), L_2 = (0, 1, 0), L_3 = (0, 0, 1)\}$ şi $X = x'_1L'_1 + x'_2L'_2 + x'_3L'_3$, acelaşi vector exprimat în baza $\{L'_1 = (0, -1, 1), L'_2 = (1, 1, 0), L'_3 = (-1, -1, 1)\}$. Ce relaţii există între x_1, x_2, x_3 şi x'_1, x'_2, x'_3?

Răspuns: $x'_1 = x_1 - x_2$, $x'_2 = x_2 + x_3$, $x'_3 = -x_1 + x_2 + x_3$.

25. În $\mathbf{R}^4$ fie bazele $S = \{L_1 = (1, 0, 0, 0), L_2 = (0, 1, 0, 0), L_3 = (0, 0, 1, 0), L_4 = (0, 0, 0, 1)\}$ şi $S' = \{L'_1 = (1, 1, 0, 0), L'_2 = (1, 0, 1, 0), L'_3 = (1, 0, 0, 1), L'_4 = (1, 1, 1, 1)\}$. Cum se transformă coordonatele unui vector $X \in \mathbf{R}^4$ când se trece de la baza S la baza S'?

Răspuns: $x_1 = x'_1 + x'_2 + x'_3 + x'_4$, $x_2 = x'_1 + x'_4$, $x_3 = x'_2 + x'_4$, $x_4 = x'_3 + x'_4$.

26. În $\mathbf{R}^4$ fie o bază oarecare $S = \{L_1, L_2, L_3, L_4\}$ şi vectorii $L'_1 = L_1 + L_2 + L_3 + L_4$, $L'_2 = L_1 + L_2 - L_3 - L_4$, $L'_3 = L_1 - L_2 + L_3 - L_4$, $L'_4 = L_1 - L_2 - L_3 + L_4$. Să se arate că L'_1, L'_2, L'_3, L'_4 formează o nouă bază S' în $\mathbf{R}^4$ şi să se scrie ecuaţia hipersuprafeţei $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = 1$, dată în baza S, în noua bază S'.

Indicaţie. Interpretăm variabilele x_1, x_2, x_3, x_4 ca fiind coordonatele unui vector arbitrar din $\mathbf{R}^4$ în baza S. Fie x'_1, x'_2, x'_3, x'_4 coordonatele aceluiaşi vector în noua bază S'. Deci:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ x'_4 \end{pmatrix}.$$

Înlocuind în ecuaţia hipersuprafeţei găsim $x'_1 \cdot x'_2 + x'_3 \cdot x'_4 = \frac{1}{8}$.

27. Fie (P_1), (P_2) două plane distincte ce trec prin origine şi (d) dreapta lor de intersecţie. Notăm cu U, V, W subspaţiile vectoriale determinate de (P_1), (P_2), respectiv (d) în $\mathbf{R}^3$. Să se facă în acest caz concret demonstraţia pentru formula:

$$dim(U + V) = dimU + dimV - dim(U \cap V).$$

28. Fie (C_1) şi (C_2) două curbe de clasă C^1 în planul $\mathbf{R}^2$. Care este condiţia necesară şi suficientă pentru ca vectorii cu extremităţile pe $(C_1) \cup (C_2)$ să genereze tot spaţiul $\mathbf{R}^2$? (O curbă de clasă C^1 în $\mathbf{R}^2$ este imaginea unei funcţii $f: I \to \mathbf{R}^2$, de clasă C^1, cu I interval în $\mathbf{R}$).

Răspuns: (C_1) şi (C_2) să nu fie conţinute simultan în aceeaşi dreaptă ce trece prin origine.

29. Spaţiul vectorial al funcţiilor reale continue pe intervalul $[a, b]$, $C[a, b]$, este finit dimensional peste $\mathbf{R}$?

Răspuns: Nu (Conţine P_n, pentru orice n – vezi problema 14.).

30. Să se ilustreze geometric procedeul de completare până la o bază a unui sistem de vectori liniar independent, pornind cu $\{X = (1, 1, 0)\}$ în $\mathbf{R}^3$.

31. Fie în $\mathbf{R}^3$ planul (P) şi dreapta (d), ambele conţinând originea. Care este condiţia necesară şi suficientă pentru a avea egalitatea $\mathbf{R}^3 = (P) + (d)$? Este această sumă o sumă directă?

Răspuns: $(d)\not\subset(P)$; Da.

32. Notăm cu S mulţimea şirurilor reale convergente. Faţă de adunarea obişnuită şi faţă de înmulţirea cu scalari, S devine spaţiu vectorial real (Ce dimensiune are?). Fie Σ spaţiul vectorial real al seriilor convergente. Putem stabili un izomorfism între S şi Σ (ca spaţii vectoriale reale)?

Indicaţie. Asociem fiecărei serii convergente din Σ şirul sumelor parţiale.

Răspuns: $dimS = dim\Sigma = \infty$; Da.

33. Fie K un corp şi n un număr natural. Să se construiască un spaţiu vectorial peste K de dimensiune n. Câte astfel de spaţii neizomorfe între ele pot construi?

Răspuns: $V = \underbrace{K \times K \times \cdots \times K}_{n \text{ ori}}$. Unul singur.

34. (spaţii vectoriale din teoria informaţiei). Fie corpul $K = \{0, 1\}$, format din două elemente şi spaţiul vectorial $V = \underbrace{K \times K \times \cdots \times K}_{n \text{ ori}}$, peste K. Câte elemente are V şi care este $dim_K V$?

Răspuns: 2^n; $dim_K V = n$.

35. Fie $\mathbf{Q}$ corpul numerelor raţionale, $\mathbf{R}$ corpul numerelor reale şi $\mathbf{C}$ corpul numerelor complexe. Să se arate că $\mathbf{R}$ este un spaţiu vectorial peste $\mathbf{Q}$ de dimensiune infinită, iar $\mathbf{C}$ este un spaţiu vectorial peste $\mathbf{R}$ de dimensiune 2.

Indicaţie. Dacă $dim_{\mathbf{Q}}\mathbf{R}<\infty$, atunci $\mathbf{R}$ ar avea tot atâtea elemente ca şi $\mathbf{Q}$, adică ar fi numărabilă (o mulţime M se zice numărabilă dacă există o bijecţie $f : \mathbf{N} \to M$).

36. Pe mulţimea $\mathbf{R}^3$ definesc adunarea prin $(x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$ şi înmulţirea cu scalari reali prin $\lambda\cdot(x_1, x_2, x_3) = (\lambda\cdot x_1, x_2, x_3)$. Devine $\mathbf{R}^3$ spaţiu vectorial real cu aceste operaţii?

Răspuns: Nu.

37. Fie V_1 şi V_2 subspaţii vectoriale în spaţiul vectorial V. Să se arate că suma $V_1 + V_2$ este directă dacă şi numai dacă $dim(V_1 + V_2) = dimV_1 + dimV_2$.

38. Fie U un subspaţiu vectorial în spaţiul V. Atunci există un alt subspaţiu, U' în V, astfel încât $V = U + U'$ iar suma să fie directă. Să se găsească U' în următoarele cazuri:

a) $U = P_3$, $V = P_5$, cu notaţiile de la problema 14;

b) $U = \mathbf{R}$, $V = \mathbf{R}^3$ $(U = (\mathbf{R}, 0, 0))$;

c) $U = (d)$, dreaptă ce trece prin origine în $V = \mathbf{R}^3$;

d) $U = \{(a_1, a_2, a_3, a_4) \mid a_1 + a_2 + 2a_3 + 3a_4 = 0\}$, $V = \mathbf{R}^4$.

Indicaţie: U' nu este unic determinat de U.

Răspuns: a) $U' = \{aX^4 + bX^5 \mid a, b\in\mathbf{R}\}$;

b) $U' = (0, \mathbf{R}, \mathbf{R}) \cong \mathbf{R}^2$;

c) Orice plan ce nu conţine pe (d);

d) $U' = \{(0, 0, 0, a) \mid a\in\mathbf{R}\}$.

39. Fie $V_1\subset V_2$ două subspaţii vectoriale în V. Să se arate că $V_1 = V_2$ dacă şi numai dacă $dimV_1 = dimV_2$.

40. Care este dimensiunea următoarelor subspaţii vectoriale din $\mathbf{R}^n$:

a) $U = \{(a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_1)\}$;

b) $U = \{(a, b, a, b, a, b, ...)\}$;

c) $U = \{(a, 0, 0, a, 0, 0, ...)$.

Răspuns: a) n – 1; b) 2 dacă $n\geq 2$; c) 1;

41. Găsiţi o bază de forma $\{(1, -1, 0, 1), (1, 1, 1, 1), c, d\}$, în $\mathbf{R}^4$, unde $c, d\in\mathbf{R}^4$.

Indicaţie: Se ia $c\notin Sp\{(1, -1, 0, 1), (1, 1, 1, 1)\}$ şi apoi $d\notin Sp\{(1, -1, 0, 1), (1, 1, 1), c)$. Astfel, se ia $c = (c_1, c_2, c_3, c_4)$, $d = (d_1, d_2, d_3, d_4)$ astfel încât matricea $\begin{pmatrix} 1 & 1 & c_1 & d_1 \\ -1 & 1 & c_2 & d_2 \\ 0 & 1 & c_3 & d_3 \\ 1 & 1 & c_4 & d_4 \end{pmatrix}$ să aibă rangul 4.

42. Fie $V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & -c & a+c \\ d & -d & a+b \end{pmatrix} \middle| a,b,c,d \in\mathbf{R} \right\}$. Să se arate că V este un spaţiu vectorial de dimensiune 4. Să se arate că $\{A_1, A_2\}$, cu $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ şi $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ este un sistem de vectori liniar independent. Să se găsească matricele A_3 şi $A_4\in V$ astfel încât $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ să fie o bază în V.

Răspuns: De exemplu $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

43. Determinaţi o bază în subspaţiul vectorial $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \mid x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 0, x_2 + 3x_3 - 2x_5 = 0\} \subset \mathbf{R}^5$.

Indicaţie: Se rezolvă sistemul care apare şi se caută un sistem fundamental de soluţii pentru acesta.

44. Fie $S_1 = Sp\{(1, 1, 0, 0), (0, -1, 1, 0), (1, -1, 0, 0)\}$ şi $S_2 = Sp\{(0, 0, 1, 1), (0, -1, 0, 0)\}$, subspaţii în $\mathbf{R}^4$. Construiţi baze în $S_1 \cap S_2$ şi în $S_1 + S_2$.

Indicaţie: Se găseşte efectiv $S_1 \cap S_2 = \{\eta(0, -1, 0, 0) + \gamma(0,0,1,0) \mid \eta, \gamma \in \mathbf{R}\}$. $S_1 + S_2$ este generat de toţi vectorii care apar în S_1 şi în S_2. Formăm o matrice cu aceştia şi o parte dintre ei care dau rangul matricei.

45. Găsiţi coordonatele vectorului $E = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ relativ la baza $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ din $M_{2,2}(\mathbf{R})$.

46. Considerăm în $\mathbf{R}^4$ următoarele subspaţii: $V_1 = \{(a - b, a + b, c, c - 2a) \mid a, b, c \in \mathbf{R}\}$, $V_2 = \{(2d, 3d + e, -e, d - e) \mid d, e \in \mathbf{R}\}$, $V_3 = \{(m - 3n, 2m + n, m, n) \mid m, n \in \mathbf{R}\}$

Găsiţi $dim(V_1 \cap V_2)$, $dim(V_1 + V_2)$, $dim(V_2 \cap V_3)$, $dim(V_1 + V_2 + V_3)$ şi un sumand direct pentru V_1 în $\mathbf{R}^4$.

§2. APLICAŢII LINIARE DE SPAŢII VECTORIALE

Fie V şi V' două spaţii vectoriale peste corpul K. O aplicaţie $f: V \to V'$ se va numi *liniară* dacă este *aditivă* şi *omogenă*, adică dacă au loc relaţiile:

a) $f(X + Y) = f(X) + f(Y)$, oricare ar fi $X, Y \in V$ şi

b) $f(\lambda \cdot X) = \lambda \cdot f(X)$, oricare ar fi $X \in V$, $\lambda \in K$.

Fie $f: V \to V'$ o aplicaţie liniară de spaţii vectoriale. Vom numi *nucleul* aplicaţiei f subspaţiul vectorial $Ker\, f = \{X \in V \mid f(X) = 0\}$ iar numărul $dim_K Ker f$, dacă există, va fi numit *defectului* aplicaţiei f. Subspaţiul vectorial $Im f = \{Y \in V' \mid \text{există } X \in V \text{ cu } Y = f(X)\}$ se va numi *imaginea* aplicaţiei f, iar numărul $dim_K Im f$, dacă există, va fi numit *rangul* aplicaţiei f. Avem relaţia: $dim\, Ker f + dim\, Im f = dim\, V$. Două spaţii vectoriale V, V' peste corpul K sunt *izomorfe* dacă există o aplicaţie liniară $f: V \to V'$ cu defectul 0 şi rangul $= dim\, V'$. V este izomorf cu V', şi se notează $V \cong V'$, dacă şi numai dacă $dim\, V = dim\, V'$, dacă ele sunt finite. Mulţimea aplicaţiilor liniare de la V la V' se va nota prin $L_K(V, V')$. $L_K(V, V')$ este tot un spaţiu vectorial peste K. Dacă $V \equiv V'$ vom spune că aplicaţia liniară f este o *transformare liniară* a spaţiului vectorial V. Mulţimea acestor transformări liniare formează un inel notat cu $L_K(V)$.

Fie V, V' două spaţii vectoriale peste corpul K, $B = \{L_1, ..., L_n\}$ o bază în V, şi $f: V \to V'$ o aplicaţie liniară. Matricea $F = (f_{ij})_{\substack{i=1,2,...,m \\ j=1,2,...,n}}$, ($m = dim\, V'$) definită prin relaţiile: $f(L_i) = \sum_{j=1}^{m} f_{ji} L'_j$, unde $B' = \{L'_1, ..., L'_m\}$ este o bază în V' se va numi *matricea asociată aplicaţiei liniare f în bazele B şi B'*. Când vom spacifica şi bazele vom nota, pentru aplicaţia liniară f, matricea sa asociată, cu $F_{BB'}$.

Fie $M_{mn}(K)$ mulţimea matricilor cu m linii şi n coloane (care are structură de inel). Aplicaţia $f \to F_{BB'}$ defineşte in izomorfism de inele între $L'_K(V, V')$ şi $M_{mn}(K)$. Acest izomorfism ne permite să lucrăm cu matricea $F_{BB'}$ în locul aplicaţiei f. De exemplu $rang\, f = rang\, F_{BB'}$.

Fie S, S' două baze în V şi $f: V \to V$ o transformare liniară. Dacă C este matricea de trecere de la baza S la baza S', atunci $F_{S'S'} = C^{-1} \cdot F_{SS}\, C$ unde F_{SS} notată F_S este matricea transformării f în baza S şi analog $F_{S'S'}$. Două matrici A şi $B \in M_{nn}(K)$ se zic *asemenea (similare)* dacă există o matrice $C \in M_{nn}(K)$, inversabilă, astfel încât $B = C^{-1}AC$.

Un subspaţiu $U \subset V$ se zice *invariant* faţă de transformarea liniară f dacă $f(U) \subset U$. Un vector $X \neq 0$, $X \in V$ se zice *vector propriu* pentru f dacă $f(X) = \lambda X$, $\lambda \in K$, iar λ se numeşte *valoare proprie* corespunzătoare vectorului propriu X. Vectorii proprii pentru acelaşi λ formează un subspaţiu invariant faţă de f în V, notat U_λ. Polinomul $P(\lambda) = \det(F_S - \lambda \cdot I)$, unde F_S este matricea asociată lui f într–o bază S, iar I este matricea identitate în $M_{nn}(K)$, cu $n = dim V$, se numeşte *polinom caracteristic* al transformării f, sau al matricii F_S. El nu depinde de alegerea bazei S în V. $P(\lambda) = 0$ se numeşte *ecuaţia caracteristică* a lui f. Dacă λ_0 este rădăcină a polinomului caracteristic $P(\lambda)$ de multiplicitate k, atunci subspaţiul U_{λ_0} are dimensiunea $\leq k$. Dacă f are n valori proprii distincte $\lambda_1, ..., \lambda_n$ atunci există o bază S în V astfel încât F_S să fie $diag(\lambda_1, ..., \lambda_n)$, adică $F_S = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$.

Matricea F_S se poate *diagonaliza* (adică este asemenea cu o matrice de tipul $diag(a_1, ..., a_n)$) dacă şi numai dacă ordinele de multiplicitate ale valorilor proprii ale ei coincid cu dimensiunile subspaţiilor invariante corespunzătoare acestor valori proprii. De exemplu matricile simetrice se pot diagonaliza întotdeauna.

O matrice $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,2,...,n \\ j=1,2,...,n}}$ se zice *triunghiulară* dacă $a_{ij} = 0$ pentru $i > j$, sau dacă $a_{ij} = 0$ pentru $i < j$.

O matrice B se zice *triangularizabilă* dacă este asemenea cu o matrice triunghiulară. Este important rezultatul: O matrice A este *triangularizabilă* dacă şi numai dacă polinomul ei caracteristic se descompune în factori liniari în corpul K. (lucru ce are loc întotdeauna pentru $K = C$).

Un sistem liniar $AX = B$, cu $A \in M_{nn}(K)$, B vector coloană, X vector coloană, este compatibil dacă şi numai dacă $rangA = rang[A, B]$ (Kronecker – Capelli).

Practic însă, pentru rezolvarea sistemelor liniare sau inversarea unei matrici se preferă metoda eliminării a lui Gauss.

Este utilă remarca că un sistem liniar $AX = B$, admite ca mulțime de soluții acei vectori $X \in V$ ($V \cong K^n$) pentru care $f(X)=B$, unde $f: V \to V$ este o transformare liniară care într–o bază anumită are ca matrice asociată pe A. Alegerea convenabilă a bazei poate simplifica mult căutarea soluțiilor sistemului.

1. Considerăm rotația planului $\mathbf{R}^2$ în jurul originii, de unghi α, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Să se arate că aceasta este o transformare liniară f a lui $\mathbf{R}^2$ și să se găsească matricea asociată ei în baza $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}\}$ dacă rotația se efectuează în sensul direct trigonometric. Care sunt subspațiile invariante relative la f? Este f un automorfism?

Soluție. Fie un punct $M(\alpha_1, \alpha_2)$ în $\mathbf{R}^2$ și $x = \alpha_1\boldsymbol{i} + \alpha_2\boldsymbol{j}$ vectorul corespunzător. De la teoria conicelor se știe că după rotația de unghi α, M devine $M'(\alpha'_1, \alpha'_2)$ cu $\alpha'_1 = \alpha_1\cos\alpha - \alpha_2\sin\alpha$ și $\alpha'_2 = \alpha_1\sin\alpha + \alpha_2\cos\alpha$. Prin urmare $f(\boldsymbol{i}) = \cos\alpha\boldsymbol{i} + \sin\alpha\boldsymbol{j}$, $f(\boldsymbol{j}) = -\sin\alpha\boldsymbol{i} + \cos\alpha\boldsymbol{j}$. Deci $f(\alpha_1\boldsymbol{i} + \alpha_2\boldsymbol{j}) = (\alpha_1\cos\alpha - \alpha_2\sin\alpha)\,\boldsymbol{i} + (\alpha_1\sin\alpha + \alpha_2\cos\alpha)\boldsymbol{j}$; să observăm că fiecare componentă a vectorului imagine este o funcție liniară de α_1 și α_2, deci f este liniară.

Matricea ei în baza $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}\}$ este $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$. Această matrice este inversabilă și concluzionăm că f este automorfism. Subspațiile vectoriale în $\mathbf{R}^2$ sunt: 0, $\mathbf{R}^2$ și orice dreaptă care trece prin origine. Cum $\alpha \neq 0$, orice dreaptă este "rotită" strict, deci singurele subspații invariante față de f și 0 și $\mathbf{R}^2$.

2. Fie aplicația $f: \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^2$, definită prin relația $f((x_1, x_2, x_3, x_4)) = (x_1, x_3)$. Să se arate că f este liniară și să se găsească matricea asociată ei în bazele canonice: $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ în $\mathbf{R}^4$ și $\{F_1, F_2\}$ în $\mathbf{R}^2$. ($E_i = (0, \ldots, \underset{i}{1}, \ldots, 0)$), ($F_1 = (1, 0)$, $F_2 = (0, 1)$). Cine este *Ker* f?

Răspuns: matricea asociată este $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. *Ker* f $= \{(0, \alpha, 0, \beta)\}$.

3. Fie $f: V \to V$ o transformare liniară a spațiului vectorial finit dimensional V. Să se arate că următoarele afirmații sunt echivalente:

a) f este izomorfism (automorfism);

b) f are nucleul nul;

c) $Im\, f = V$.

Soluție. a) $\Rightarrow$ b) Dacă f este automorfism atunci există f^{-1} și dacă $f(X) = 0$, avem $X = f^{-1}(f(X)) = f^{-1}(0) = 0$. b) $\Rightarrow$ c) Să observăm relația: $\dim Ker\, f + \dim Im\, f = \dim V$; rezultă că subspațiul Im f are aceeași dimensiune cu spațiul întreg V, deci $Im\, f = V$. c) $\Rightarrow$ a) Aceeași relație ne spune că $Ker\, f = 0$, adică f este injectivă; $Im\, f = V$ ne spune că f este surjectivă. Acestea două asigură existența transformării liniare f^{-1}.

4. Fie $f: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ transformarea definită prin $f(x_1L_1 + x_2L_2 + x_3L_3) = x_3L_1 + x_1L_2 + x_2L_3$, unde $\{L_1, L_2, L_3\}$ este o bază în $\mathbf{R}^3$. Să se arate că această transformare este liniară și că $f \circ f \circ f =$ identitatea. Să se deducă de aici că f este automorfism și să se calculeze f^{-1}. Care este matricea asociată transformării f^{-1} în baza $\{L_1, L_2, L_3\}$?

Răspuns: Avem că $f^{-1} = f \circ f$, deci matricea asociată este $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

5. Fiecărui vector $X \in \mathbf{R}^3$ îi asociem vectorul X', proiecția lui X pe dreapta de ecuație $x_1 = x_2 = x_3$. Să se arate că această asociere este o aplicație liniară f de la $\mathbf{R}^3$ la $\mathbf{R}^3$. Să se găsească matricea asociată ei în raport cu baza $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ în $\mathbf{R}^3$. Cine sunt *Ker* f și *Im* f?

Indicație: $(x, y, z) \to \left(\frac{x+y+z}{3}, \frac{x+y+z}{3}, \frac{x+y+z}{3}\right)$.

Răspuns: $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$; $Ker\, f = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$;

$Im\, f = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x = y = z\} \cong \mathbf{R}$.

6. Fie $V_1, V_2, \ldots, V_n$ subspații vectoriale în V astfel încât $V = V_1 + V_2 + \cdots + V_n$, iar suma să fie directă. Pentru $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, $X \in V$, $X_i \in V_i$ considerăm aplicația (proiecția pe componenta i): $X \to X_i$. Să se arate că această aplicație este liniară, surjectivă și să se găsească nucleul ei.

Răspuns: Nucleul ei este $V_1 + V_2 + \cdots + V_{i-1} + V_{i+1} + \cdots + V_n$.

7. Fie $M_2(\mathbf{R})$ spațiul vectorial al matricelor reale 2×2 și aplicația $f: M_2(\mathbf{R}) \to M_2(\mathbf{R})$ definită prin multiplicarea unei matrice, la dreapta, cu matricea $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Să se arate că f este liniară și să se găsească matricea ei în baza $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$.

Soluție. Aplicația este liniară deoarece pentru $A, B \in M_2(\mathrm{R})$ avem $(A + B)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + B\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ și $(\lambda \cdot A)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \left(A\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$. Pentru simplificare, notăm baza indicată cu $L_{11}, L_{21}, L_{12}, L_{22}$. Avem:

$$f(L_{11}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot L_{11} + 0 \cdot L_{21} + 1 \cdot L_{12} + 0 \cdot L_{22} = L_{12};$$

$$f(L_{21}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = L_{22};$$

$$f(L_{12}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = L_{11};$$

$$f(L_{22}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = L_{21}.$$

Matricea căutată va fi: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

8. Care din următoarele aplicații sunt liniare:

a) $f: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$, $X \in \mathbf{R}^3$, $f(X) =$ proiecția vectorului X pe planul xOy.

b) $f: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, $f(X) = \alpha \cdot X + X_0$, $\alpha \in \mathbf{R}$.

c) $f: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, $f(X) =$ simetricul vectorului X față de un plan fix care trece prin origine.

d) $f: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, $f(X) = \|X\|$.

e) $f: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, $f(X) = X \cdot X_0$, cu X_0 vector fix (produs scalar).

Răspuns: a) Este; b) Este numai dacă $X_0 = 0$; c) Este; d) Nu este; e) Este.

9. Fie $X \in \mathbf{R}^n$, $a \in \mathbf{R}$ și aplicația $f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ definită prin $f(X) = a \cdot X$. Care este matricea asociată aplicației f în baza canonică $\{E_1, E_2, ..., E_n\}$. Dar în baza $\{E_2, E_1, E_3, E_4, ..., E_n\}$?

R: $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ & & & a & 0 \\ 0 & \cdots & & & a \end{pmatrix}$; aceeași matrice.

10. Fie $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ baza canonică din $\mathbf{R}^4$ și aplicația $f: \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ definită prin $f(E_1) = E_2 + E_3$, $f(E_2) = E_3 + E_4$, $f(E_3) = E_4 + E_1$, $f(E_4) = E_1 + E_2$. Cine este $f((1, 2, 3, 4))$? Care este matricea asociată transformării f în baza $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$? Cât este *dim Im* f?

Răspuns: $F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; $f((1, 2, 3, 4)) = (7, 5, 3, 5)$; *dim Im* f = *rang* F = 3.

11. Fie $f: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ o transformare liniară care în baza canonică $\{E_1, E_2, E_3\}$ are matricea: $F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$. Dacă $X = (a, a, 0)$ să se găsească $f(X)$ și $f((0, 1, 5))$.

Răspuns: $(3a, 2a, -4a)$; $(2, 2, -7)$.

12. Fie în $\mathbf{R}^3$ bazele $\{F_1 = (1, 1, 1), F_2 = (0, 1, 1), F_3 = (0, 0, 1)\}$ și $\{E_1 = (1, 0, 0), E_2 = (1, 1, 0), E_3 = (1, 1, 1)\}$. Fie $f: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ o transformare liniară care în baza $\{F_1, F_2, F_3\}$ are matricea $F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Să se găsească matricea transformării f, F', în baza $\{E_1, E_2, E_3\}$.

Soluția I. Găsim mai întâi matricea de trecere de la prima bază la a doua $E_1 = F_1 - F_2$, $E_2 = F_1 - F_3$, $E_3 = F_1$. Matricea trecere va fi: $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$; $C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Acum $F' = C^{-1}FC$. Deci $F' = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Soluția II. Exprimăm mai întâi un vector $X \in \mathbf{R}^3$ în baza $\{E_1, E_2, E_3\}$; $X = x_1E_1 + x_2E_2 + x_3E_3 = x_1(F_1 - F_2) + x_2(F_1 - F_3) + x_3F_1 = (x_1 + x_2 + x_3)F_1 + (-x_1)F_2 + (-x_2)F_3$. Știind cum acționează f pe baza $\{F_1, F_2, F_3\}$, găsim că $f(X) = (x_1 + x_2 + x_3)f(F_1) - x_1f(F_2) - x_2f(F_3) = (x_1 + x_2 + x_3)(1, 2, 0) - x_1(2, 0, 1) - x_2(1, 1, -1) = (-x_1 + x_3)F_1 + (2x_1 + 2x_3 + x_2)F_2 + (-x_1 + x_2)F_3 = (-x_1 + x_3)E_3 + (2x_1 + x_2 + 2x_3)(E_3 - E_1) + (-x_1 + x_2)(E_3 - E_2) = (-2x_1 - x_2 - 2x_3)E_1 + (x_1 - x_2)E_2 + (2x_2 + 3x_3)E_3$.

Am obținut că:

$f(x_1E_1 + x_2E_2 + x_3E_3) = (-2x_1 - x_2 - 2x_3)E_1 + (x_1 - x_2)E_2 + (2x_2 + 3x_3)E_3$. De aici $f(E_1) = -2E_1 + E_2 + 0 \cdot E_3$, $f(E_2) = -E_1 - E_2 + 2E_3$, $f(E_3) = -2E_1 + 3E_3$.

Matricea F' este deci: $F' = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

13. Fie P_n spațiul vectorial al polinoamelor reale, de variabilă t, de grad $\leq n$ și baza $L_1 = 1$, $L_2 = t$, ..., $L_{n+1} = t^n$. Fie $f: P_n \to P_n$ definită prin $f(P(t)) = P(t + 1) - P(t)$, unde $P(t) \in P_n$. Se cere matricea transformării f în baza $\{L_1, L_2, ..., L_{n+1}\}$.

Răspuns: $F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & \cdots & C_n^1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \cdots & C_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.

14. Fie transformarea liniară f: $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ astfel încât f((0, 0, 1)) = (2, 3, 5), f((0, 1, 1)) = (1, 0, 0) şi f((1, 1, 1)) = (0, 1, – 1). Care este matricea transformării f în baza canonică $\{E_1, E_2, E_3\}$?

Răspuns: $f(E_3) = (2, 3, 5)$; $f(E_2) = f((0, 1, 1) - (0, 0, 1)) = (-1, -3, -5)$, $f(E_1) = f((1, 1, 1) - (0, 1, 1)) = (-1, 1, -1)$. Deci: $F = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \\ -1 & -5 & 5 \end{pmatrix}$.

15. Fie f: $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definită prin $f(X) = (x_1 - 2x_3, x_1 + 3x_2 + 2x_3, -x_1 + x_2 + x_3)$, unde $X = x_1L_1 + x_2L_2 + x_3L_3$, reprezentarea lui X într-o bază oarecare $\{L_1, L_2, L_3\}$ a spaţiului $\mathbf{R}^3$. Să se arate că transformarea f este liniară şi să se scrie matricea asociată F, în aceeaşi bază $\{L_1, L_2, L_3\}$ în care au fost date X şi f(X). (pe componente).

Răspuns: $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

16. Fie aplicaţia $(x_1, x_2, x_3, x_4) \to (x_1 + x_2, x_1 - x_3, x_1^2, x_1x_4)$, definită din $\mathbf{R}^4$ în $\mathbf{R}^4$. Este liniară?

Răspuns: Nu.

17. Fie aplicaţia f: $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ care în baza $\{L_1, L_2, L_3\}$ are matricea $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Să se găsească matricea ataşată aplicaţiei f, F', în baza $\{L_1', L_2', L_3'\}$, unde $L_1' = L_1 + 2L_2 + L_3$, $L_2' = 2L_1 + L_2 + 3L_3$, $L_3' = L_1 + L_2 + L_3$.

Răspuns: $F' = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

18. Fie transformările liniare f_1, f_2: $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definite respectiv $f_1((a, b, c)) = (3a + 3b + 2c, a - b + c, 2a + 3b + c)$, $f_2((a', b', c')) = (-4a' - b' + 4c', a' - c', 5a' + 2b' - 4c')$. Să se determine expresia transformării $f_1 \circ f_2$ în aceeaşi bază în care am dat coordonatele vectorilor din enunţ.

Răspuns: $(f_1 \circ f_2)(a', b', c') = (a' + b' + c', b' + c', c')$.

19. Fie aplicaţiile liniare (date în baze oarecare): f_1: $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$, f_2: $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^4$, definite prin: $f_1((a_1, a_2, a_3)) = (a_1 + a_3, a_1 + a_2 - a_3)$, $f_2((b_1, b_2)) = (b_1 + b_2, b_1, b_2, 2b_1 - b_2)$. Să se precizeze compunerea $f_3 = f_2 \circ f_1$ şi matricile acestor aplicaţii în bazele considerate.

Răspuns: $f_3((a, b, c)) = (2a + b, a + c, a + b - c, a - b + 3c)$;

$F_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; $F_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$; $F_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

20. Transformarea liniară f: $\mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$, are relativ în baza $\{L_1, L_2, L_3, L_4\}$ matricea asociată: $F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Găsiţi matricele asociate transformării relativ la bazele:

a) $\{L_1, L_3, L_2, L_4\}$

b) $\{L_1, L_1 + L_2, L_1 + L_2 + L_3, L_1 + L_2 + L_3 + L_4\}$

Răspuns: $F_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $F_2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & -8 & -7 \\ 1 & 4 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$.

21. Transformarea liniară f: $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ are relativ la baza $\{L_1, L_2, L_3\}$ matricea:

$$F = \begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}.$$

Să se găsească matricea transformării relativ la baza $F_1 = 2L_1 + 3L_2 + L_3$, $F_2 = 3L_1 + 4L_2 + L_3$, $F_3 = L_1 + 2L_2 + 2L_3$. Interpretarea geometrică şi fizică.

Răspuns: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, formă diagonală. În noua bază transformarea f este o suprapunere de 3 transformări: transformarea identică, dilatarea spaţiului după axa F_2 cu coeficient 2 şi dilatarea spaţiului după axa F_3 cu coeficient 3.

22. Fie T: $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 - x_3, x_1 - x_2, x_1 - x_3)$. Fie E = {(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)} o bază în $\mathbf{R}^3$. Găsiţi matricele asociate lui T şi lui T^{-1} în baza E.

Răspuns: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$.

23. Fie P_n spaţiul vectorial al polinoamelor reale, într-o variabilă t, de grade $\le$ n. Fie d_n aplicaţia liniară de derivare, d_n: $P_n \to P_{n-1} \subset P_n$.

a) Considerând $d_n: P_n \to P_n$ să se găsească matricea asociată transformării d_n relativ la bazele $\{1, t, t^2, \ldots, t^n\}$ şi $\{1, t-a, \frac{(t-a)^2}{2!}, \ldots, \frac{(t-a)^n}{n!}\}$

b) Să se arate că $d_0 \circ d_1 \circ d_2 \circ \cdots \circ d_n = 0$;

c) Care este *Im* d_n? Dar *Ker* d_n?

Răspuns: a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$;

b) *Indicaţie*. Prin derivare scade gradul polinomului.

c) *Im* $d_n = P_{n-1}$; *Ker* $d_n = P_0$.

24. Fie aplicaţia $f: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definită prin $f(ai + bj + ck) = bi + aj + ck$. Să se arate că această aplicaţie este $\mathbf{R}$ – liniară. Care este nucleul şi imaginea aplicaţiei? Care este matricea asociată ei în baza $\{i, j, k\}$. Dar în baza $\{i-j, j, k-j\}$. Care sunt vectorii lăsaţi pe loc de f?

Soluţie. Fie a, b$\in \mathbf{R}$, $X = x_1 i + x_2 j + x_3 k$, $Y = y_1 i + y_2 j + y_3 k$. $aX + bY = (ax_1 + by_1) i + (ax_2 + by_2) j + (ax_3 + by_3) k$. Verificăm acum că $f(aX + bY) = a \cdot f(X) + b \cdot f(Y)$.

Fie acum $X = a i + b j + ck \in Ker\, f$, $f(X) = 0 = b i + a j + c k$, deci $X = 0$ şi $Ker\, f = \{0\}$.

$Im\, f = \mathbf{R}^3$ deoarece orice vector poate fi obţinut din alt vector prin schimbarea între ele a primelor două coordonate. Avem $f(i) = j$, $f(j) = i$, $f(k) = k$, deci matricea aplicaţiei f în baza $\{i, j, k\}$ este: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Avem încă $f(i - j) = -(i - j)$, $f(j) = i - j + j$, $f(k - j) = -(i - j) - j + k$. Deci matricea asociată în baza $\{i - j, j, k - j\}$ este: $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Fie $X = x_1 i + x_2 j + x_3 k$ astfel încât $f(X) = X$. De aici rezultă că $x_1 = x_2$. Deci vectorii lăsaţi pe loc de f sunt de forma $X = x_1(i + j) + x_3 k$. Ei formează un subspaţiu vectorial de dimensiune 2 în $\mathbf{R}^3$.

25. Fie matricea $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Care este transformarea liniară f care are ca matrice pe F în baza $S = \{E_1 = (1, 0, 0), E_2 = (0, 1, 0), E_3 = (0, 0, 1)\}$? Care este matricea

de trecere C de la baza $S' = \{(1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$ la baza S? Care este transformarea liniară g care duce baza S' în baza S?

Răspuns: $f(x_1E_1 + x_2E_2 + x_3E_3) = (x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_1 + x_3) = (x_1 + x_2)E_1 + (x_2 + x_3)E_2 + (x_1 + x_3)E_3$; $C = F^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. $g(X) = f^{-1}(X)$.

26. Fie transformarea liniară $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ dată de matricea: $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, $\theta \in \mathbf{R}$, în baza $\{i, j\}$. Care este transformarea f^{-1} în baza $\{i + j, i - j\}$. Ce reprezintă geometric f şi f^{-1}?

Soluţie. f este rotaţia planului cu un ungihi θ, iar f^{-1} va fi rotaţia planului cu un unghi $-\theta$; f^{-1}, în baza $\{i, j\}$ va avea deci matricea: $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$; în baza $\{i + j, i - j\}$ vom avea următoarele. Plecăm cu $f^{-1}(ai + bj) = (a \cdot \cos\theta + b \cdot \sin\theta)i + (-a \cdot \sin\theta + b \cdot \cos\theta)j$, de unde $f^{-1}(a(i + j) + b(i - j)) = f^{-1}((a + b)i + (a - b)j) = [(a + b)\cos\theta + (a - b)\sin\theta]i + [-(a + b)\sin\theta + (a - b)\cos\theta]j = c(i + j) + d(i - j) = (c + d)i + (c - d)j$. Găsim pe c şi d rezolvând sistemul liniar:

$$c + d = (a + b)\cos\theta + (a - b)\sin\theta$$
$$c - d = -(a + b)\sin\theta + (a - b)\cos\theta$$

27. Să se determine polinomul caracteristic al matricei:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soluţie. Notăm

$$\det \begin{pmatrix} a_1 - \lambda & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ 1 & -\lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & & 0 & 0 & \cdots & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = [a_1, a_2, \ldots, a_n].$$

Dezvoltăm acum determinantul după ultima linie. Obţinem relaţia de recurenţă: $[a_1, a_2, \ldots, a_n] = -\lambda[a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}] - \det\begin{pmatrix} a_1-\lambda & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_n \\ 1 & -\lambda & \cdots & 0 & \vdots \\ \vdots & & & -\lambda & \vdots \\ 0 & \cdots & & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Ultimul determinant îl dezvoltăm după ultima coloană şi obţinem valoarea $(-1)^n a_n$. Obţinem deci $[a_1, a_2, \ldots, a_n] = -\lambda[a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}] + (-1)^{n+1}a_n = -\lambda(-\lambda[a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}] + (-1)^n a_{n-1}) + (-1)^{n+1}a_n = \lambda^2[a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}] + (-1)^{n+1}\lambda a_{n-1} + (-1)^{n+1}a_n = -\lambda^3[a_1, a_2, \ldots, a_{n-3}] + \lambda^2(-1)^{n-1}a_{n-2} + \lambda(-1)^{n+1}a_{n-1} + (-1)^{n+1}a_n = \cdots = (-1)^n[\lambda^n - a_1\lambda^{n-1} - a_2\lambda^{n-2} - \cdots - a_n]$.

28. Fie transformarea $f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, definită prin $f(X) = \lambda_0 X$. Să se determine polinomul caracteristic pentru f.

Răspuns: $P(\lambda) = (\lambda_0 - \lambda)^n$.

29. Determinaţi valorile proprii şi vectorii proprii pentru transformările liniare care au ca matrice asociate (într–o bază oarecare) matricele următoare:

a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

g) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; h) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$;

Soluţie. f) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ sau $\begin{cases} (1-\lambda)x_1 = 0 \\ -\lambda x_2 = 0 \\ -\lambda x_3 = 0 \\ x_1 + (1-\lambda)x_4 = 0 \end{cases}$ (1).

Acest sistem are soluţii nebanale numai dacă determinantul: $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$

sau $\lambda^2(1-\lambda)^2 = 0$. Deci valorile proprii sunt $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = \lambda_4 = 1$. Pentru $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ sistemul (1) devine $x_1 = x_4 = 0$, $x_2, x_3 \in \mathbf{R}$; $x_2 \neq 0$ sau $x_3 \neq 0$ pentru a avea un vector propriu.

Vectorii proprii corespunzători pentru $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ împreună cu vectorul nul formează subspaţiul $\{(0, \alpha, \beta, 0) \mid \alpha, \beta \in \mathbf{R}\}$. Pentru $\lambda_3 = \lambda_4 = 1$ sistemul (1) devine $x_3 = x_2 = 0$, $x_1 = 0$, $x_4 \in \mathbf{R}$. Deci subspaţiul invariant corespunzător este $\{(0, 0, 0, \alpha)\}$.

Răspuns: a) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$, $\{(\alpha, \alpha, -\alpha) \mid \alpha \neq 0\}$; b) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$, $\{\alpha(1, 2, 0) + \beta(0, 0, 1) \mid \alpha, \beta$ nu sunt simultan nuli$\}$; c) $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$, $\{\alpha(1,1,1) \mid \alpha \neq 0\}$, $\{\alpha(1,2,3) \mid \alpha \neq 0\}$; d) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$, $\{\alpha(3, 1, 1) \mid \alpha \neq 0\}$; e) $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$, $\{\alpha(1, 2, 2) \mid \alpha \neq 0\}$, $\{\alpha(1, 2, 1) \mid \alpha \neq 0\}$; f) vezi soluţia mai sus; g) $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$, $\{\alpha(1, 0, 1, 0) + \beta(0, 0, 0, 1) \mid \alpha$ şi β nenuli simultan, adică $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0\}$, $\{\alpha(0, 1, 0, 0) + \beta(0, 0, 1, 0) \mid \alpha^2 + \beta^2 \neq 0\}$; h) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 2$, $\{\alpha(1, 1, -1, 0) + \beta(1, 1, 0, 1)\}$.

30. Să se reducă la forma diagonală matricele, specificându–se şi bazele în care capătă această formă: $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

Soluţie. pentru A: Să observăm că matricea este simetrică deci se poate diagonaliza. Pe diagonală vor fi valorile proprii, iar noua bază va fi formată din vectorii proprii (dacă valorile proprii sunt distincte). Polinomul caracteristic pentru A este $P(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda + 2)(\lambda - 4)$. Pentru $\lambda_1 = 1$ considerăm sistemul $AX = X$, sau $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0 \\ -2x_1 - 2x_3 = 0 \\ -2x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$

De aici obţinem soluţia $\{\alpha(2, 1, -2)\}$. Ca vector propriu generator al subspaţiului corespunzător putem lua $V_1 = (2, 1, -2)$. Pentru $\lambda_2 = -2$, obţinem $V_2 = (1, 2, 2)$. Pentru $\lambda_3 = 4$ găsim $V_3 = (2, -2, 1)$. Să observăm că vectorii V_1, V_2, V_3 nu sunt unic determinaţi.

Deci în baza $\{V_1, V_2, V_3\}$ matricea A capătă forma: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Răspuns: $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

31. Determinaţi care din următoarele transformări liniare (date prin matricele lor într–o bază oarecare) pot fi diagonalizate. Găsiţi matricea diagonală şi baza corespunzătoare în cazul că pot fi diagonalizate.

a) $\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 6 & -5 & -3 \\ 3 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$;

$$\text{d)}\begin{pmatrix}4 & -3 & 1 & 2\\ 5 & -8 & 5 & 4\\ 6 & -12 & 8 & 5\\ 1 & -3 & 2 & 2\end{pmatrix}; \qquad \text{e)}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Indicație. Vezi criteriul de diagonalizare.

Răspuns: a) $\begin{cases} X_1 = (1, 1, 1)\\ X_2 = (1, 1, 0)\\ X_3 = (1, 0, -3)\end{cases}, \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$; b) nu poate fi diagonalizată;

c) $\begin{cases} X_1 = (1, 1, 0, 0)\\ X_2 = (1, 0, 1, 0)\\ X_3 = (1, 0, 0, 1)\\ X_4 = (1, -1, -1, -1)\end{cases}, \begin{pmatrix}2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -2\end{pmatrix}$; d) nu poate fi diagonalizată;

e) $\begin{cases} X_1 = (1, 0, 0, 1)\\ X_2 = (0, 1, 1, 0)\\ X_3 = (0, -1, 1, 0)\\ X_4 = (-1, 0, 0, 1)\end{cases}, \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$.

32. Fie f: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ o transformare liniară, λ o valoare proprie pentru f și $X \in \mathbf{R}^n$ un vector propriu corespunzător lui λ. Să se arate că $f \circ f$ *notat* cu f^2 are pe λ^2 ca valoare proprie și pe X vector propriu corespunzător lui λ^2. La fel, să se deducă un rezultat analog pentru f^k, k un număr natural oarecare. Să se arate în final că dacă P(t) este un polinom cu coeficienți reali atunci $P(\lambda)$ este o valoare proprie pentru transformarea liniară P(f), iar X un vector propriu corespunzător lui $P(\lambda)$. Aplicând acest rezultat să se găsească valorile și vectorii proprii pentru matricele: $F_1 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}^2$, $F_2 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}^{10}$, $F_3 =$

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 1\\ -3 & -2 & 2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}^2.$$

Indicație. Pentru F_1, $P(t) = 1 + t^2$; pentru F_2, $P(t) = t^{10}$; pentru F_3 nu putem găsi un astfel de polinom și facem calculele direct.

Răspuns: Pentru F_1, $\lambda_1 = 2$, $\{\alpha(1, 0) \mid \alpha \neq 0\}$, $\lambda_2 = 5$, $\{\alpha(1, 1) \mid \alpha \neq 0\}$;
Pentru F_2, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$, $\{(\alpha, \beta, 0) \mid \alpha, \beta \in R, \alpha^2 + \beta^2 \neq 0\}$
Pentru F_3, $\lambda_1 = 4$, $\{\alpha(1, 0, 0) \mid \alpha \neq 0\}$, $\lambda_2 = 2$, $\{\alpha(-2, 1, 0) \mid \alpha \neq 0\}$, $\lambda_3 = 5$, $\{\alpha(22, 1, 3) \mid \alpha \neq 0\}$.

33. Fie F o matrice peste corpul K. Valorile proprii ale matricii F sunt întotdeauna în K?

Răspuns: Nu. De exemplu K = **R**, $F = \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.

34. Fie f transformarea liniară în $\mathbf{R}^3$ dată de rotația spațiului în jurul axei Oz cu un unghi $\theta = \pi/3$. Determinați vectorii și valorile proprii ale transformării f. Interpretare geometrică.

Indicație. Matricea corespunzătoare este: $F = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

Răspuns: Singura valoare proprie reală este $\lambda = 1$, iar vectorii proprii corespunzători $\{\alpha(0, 0, 1) \mid \alpha \neq 0\}$. Din punct de vedere geometric singurul subspațiu invariant (propriu) este evident axa Oz.

35. Fie transformarea f: $\mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$, care într–o bază $\{L_1, L_2, L_3, L_4\}$ are matricea: $\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 4 & -2\\ 2 & -1 & 0 & 1\\ 2 & -1 & -1 & 2\end{pmatrix}$. Determinați vectorii și valorile proprii pentru f și arătați că subspațiul generat de vectorii $L_1 + 2L_2$ și $L_2 + L_3 + 2L_4$ este invariant față de f.

Soluție. Polinomul caracteristic este $P(\lambda) = (1 - \lambda)^4$. Deci valorile proprii sunt $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 1$. Vectorii proprii corespunzători se găsesc rezolvând sistemul: $\begin{pmatrix}0 & 0 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 4 & -2\\ 2 & -1 & -1 & 1\\ 2 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$ sau $2x_3 - x_4 = 0$, $4x_3 - 2x_4 = 0$, $2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0$. Are o infinitate de soluții de forma $\{\beta(1, 2, 0, 0) + \alpha(0, 1, 1, 2)\}$, unde coordonatele vectorilor considerați sunt în baza $\{L_1, L_2, L_3, L_4\}$. Să observăm că subspațiul de mai sus, este generat de vectorii dați în ipoteza problemei, deci va fi invariant față de f, ca subspațiu de vectori proprii.

36. Care sunt subspațiile din $\mathbf{R}^3$ invariate simultan de matricele: $A = \begin{pmatrix}5 & -1 & -1\\ -1 & 5 & -1\\ -1 & -1 & 5\end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix}-6 & 2 & 3\\ 2 & -3 & 6\\ 3 & 6 & 2\end{pmatrix}$.

Răspuns: $\{0\}$, dreapta (ce trece prin origine) de direcție $(1, -2, 1)$, și $\mathbf{R}^3$.

37. Fie matricea reală $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Se poate diagonaliza? Schimbând baza, se poate aduce A la o formă triunghiulară? Peste ce corp se poate A diagonaliza?

Indicație. Matricea A nu se poate diagonaliza în corpul **R** deoarece polinomul ei caracteristic este $P(\lambda) = \lambda^2 + 1$. Din aceleași motive (vezi criteriul de triangularizare) matricea A nu se poate aduce la formă triunghiulară peste corpul R. În corpul numerelor complexe A este asemenea cu matricea: $B = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$.

38. Pentru matricele următoare să se precizeze vectorii și valorile proprii și să se discute posibilitatea de a le diagonaliza sau triangulariza: $A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -15 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -6 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Răspuns: Pentru matricea A avem: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_{2,3} = 0$. Pentru $\lambda_1 = 1$ avem $\{\alpha(1, 1, 1)\}$, pentru $\lambda_{2,3} = 0$ avem $\{\alpha(1,2,3)\}$; matricea nu se poate diagonaliza dar se poate triangulariza. Pentru matricea B, $\lambda_1 = 3$, $\{\alpha(1, 2, 2)\}$, $\lambda_{2,3} = -1$, $\{\alpha(1, 2, 1)\}$, nu se poate diagonaliza dar se poate triangulariza. Pentru matricea C, $\lambda_{1,2,3} = -1$, spațiul corespunzător este $\{\alpha(-2,1,0) + \beta(5,0,1)\}$, matricea nu se poate diagonaliza dar se poate triangulariza. Pentru matricea D, $\lambda_{1,2} = 3$, $\lambda_3 = 2$; subspațiul corespunzător valorii proprii $\lambda = 3$ este $\{\alpha(1, 2, 1)\}$ și are dimensiunea $1 <$ ordinul multiplicității pentru $\lambda = 3$. Deci matricea D nu este diagonalizabilă. Totuși ea se poate triangulariza. De exemplu în baza $U_1 = (1, 2, 1)$, $U_2 = (0, 3, 2)$, $U_3 = (0, 0, 1)$ matricea D devine $D' = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

CAPITOLUL IV

SPAȚII EUCLIDIENE ȘI TRANSFORMĂRI LINIARE ÎN SPAȚII EUCLIDIENE. FORME BILINIARE ȘI PĂTRATICE.

§1. SPAȚII EUCLIDIENE ȘI TRANSFORMĂRI LINIARE ÎN SPAȚII EUCLIDIENE.

În acest capitol vom nota cu V un spațiu vectorial peste un corp comutativ K, unde K este corpul numerelor reale sau al numerelor complexe.

Vom spune că în V s-a definit un *produs scalar* dacă fiecărei perechi de vectori $(X,Y) \in V \times V$ îi corespunde un unic număr din K, notat $<X,Y>$ astfel încât pentru orice scalari $\alpha, \beta \in K$ și orice vectori $X,Y,Z \in V$ să fie satisfăcute axiomele:

a) $<\alpha \cdot X + \beta \cdot Y, Z> = \alpha<X,Z> + \beta<Y,Z>$;

b) $<X,Y> = \overline{<Y,X>}$, unde $\overline{<Y,X>}$ este conjugatul complex al lui $<Y,X>$;

c) $<X,X> \geq 0$ și $<X,X> = 0$ dacă și numai dacă X este vectorul nul.

Numim *spațiu euclidian* un spațiu vectorial pe care s-a definit un produs scalar. Dacă V este spațiu euclidian iar K este corpul numerelor complexe, atunci V este numit uneori *spațiu unitar*.

Dacă $<X,Y> = 0$, vectorii X,Y se numesc *ortogonali*. Prin *norma* vectorului X din spațiul euclidian V înțelegem numărul $\|X\| = \sqrt{<X,X>}$ iar a norma vectorul nenul X înseamnă a găsi vectorul $X' = \frac{1}{\|X\|} \cdot X$.

Reamintim că produsul scalar a doi vectori într-un spațiu euclidian verifică inegalitatea Cauchy-Schwarz:

$$|<X,Y>| \leq \|X\| \cdot \|Y\|.$$

Dacă V este un spațiu euclidian iar $\{e_i\}_{i \in I}$ este o bază a lui V, vom spune că această bază este *ortogonală* dacă orice doi vectori distincți din bază sunt ortogonali. Baza se va numi *ortonormată* (*ortonormală*) dacă ea este ortogonală și în plus toți vectorii ei au norma egală cu unu.

Dată o bază arbitrară într-un spațiu euclidian finit dimensional, se poate construi, plecând de la aceasta o bază ortogonală (ortonormată) folosind *procedeul de ortogonalizare (ortonormalizare) (Gram-Schmidt)* descris pentru cazul n=3 în problema 6.

În cele ce urmează ori de câte ori vom considera spațiile vectoriale reale sau complexe $V = K^n = \{X=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n), \alpha_i \in K\}$ iar $X=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ și $Y=(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n)$ sunt din V, operațiile în V sunt cele canonice adică $X+Y=(\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2,\ldots,\alpha_n+\beta_n)$ iar $\alpha \cdot X = (\alpha\alpha_1,\alpha\alpha_2,\ldots,\alpha\alpha_n)$ pentru $\alpha \in K$. Când $V = \mathbf{R}^n$ este considerat spațiu euclidian, produsul scalar se consideră cel definit în problema 1 iar când $V = \mathbf{C}^n$ se utilizează cel definit în problema 3. În cazul spațiului euclidian al polinoamelor de grad mai mic sau egal cu n vom utiliza produsul scalar din problema 9.

Dacă V este un spațiu euclidian un operator liniar $T:V\to V$ se numește *autoadjunct* dacă $<T(X),Y> = <X,T(Y)>$, $\forall X,Y\in V$. Operatorul T se numește *ortogonal* dacă $<T(X),T(Y)> = <X,Y>$, $\forall X,Y\in V$. Dacă V are dimensiunea egală cu n, B este o bază ortonormată a sa iar A este matricea este matricea lui T în baza B, atunci T este autoadjunct dacă și numai dacă $A=A^T$ (matricea este simetrică). În aceleași condiții T este ortogonal dacă și numai dacă $AA^T=I_n$.

1. Considerăm spațiul vectorial real $V=\mathbf{R}^2$ și $X=(\alpha_1,\alpha_2), Y=(\beta_1,\beta_2)\in V$. Să se arate că aplicația $<\ ,\ >:V\times V\to\mathbf{R}$ definită prin relația $<X,Y> = \alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2$ este un produs scalar. Generalizare pentru $V=\mathbf{R}^n$.

Soluție. Vom verifica axiomele produsului scalar.

a) Calculăm $\alpha\cdot X+\beta\cdot Y=(\alpha\alpha_1+\beta\beta_1,\alpha\alpha_2+\beta\beta_2)$ și dacă $Z=(\gamma_1,\gamma_2)$, atunci $<\alpha\cdot X+\beta\cdot Y,Z> = (\alpha\alpha_1+\beta\beta_1)\gamma_1+(\alpha\alpha_2+\beta\beta_2)\gamma_2=\alpha(\alpha_1\gamma_1+\alpha_2\gamma_2)+\beta(\beta_1\gamma_1+\beta_2\gamma_2)=\alpha<X,Z>+\beta<Y,Z>$.

b) $<X,Y> = \alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2 = <Y,X> = \overline{<Y,X>}$, deoarece aici scalarii sunt numere reale.

c) $<X,X>=\alpha_1^2+\alpha_2^2\ge 0$ și evident $<X,X>=0$ dacă și numai dacă $X=(0,0)=0_V$.

Dacă $V=\mathbf{R}^n$, $X=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)$ și $Y=(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n)$ se definește $<X,Y>=\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+$ $+\alpha_n\beta_n$ verificarea axiomelor produsului scalar făcându-se analog ca și în cazul n=2.

2. În spațiul euclidian $V=\mathbf{R}^3$ găsiți un vector Z de normă egală cu unu și ortogonal pe vectorii X,Y dacă:

a) X=(2,1,0), Y=(-3,2,0);

b) X=(1,1,-1), Y=(2,1,3);

c) X=(1,3,-4), Y=(2,3,-4).

Indicație. a) Se consideră $Z = (\alpha,\beta,\gamma)$ și din condițiile $<X,Z>=0$ și $<Y,Z>=0$ obținem $2\alpha+\beta=0$ și $-3\alpha+2\beta=0$. În plus, deoarece $\|Z\|=1$ și de aici $\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}=1$. Din cele trei relații găsim $\alpha=\beta=0$ și $\gamma=\pm1$. Deci $Z = \pm(0,0,1)$; Analog în celelalte cazuri se obțin soluțiile b) $Z=\pm\left(-\frac{4}{\sqrt{42}},\frac{5}{\sqrt{42}},\frac{1}{\sqrt{42}}\right)$; c) $Z=\pm\left(0,\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right)$.

3. Fie $V=\mathbf{C}^2$ considerat în mod canonic ca spațiu vectorial peste $\mathbf{C}$ și $X=(\alpha_1,\alpha_2)$, $Y=(\beta_1,\beta_2)\in V$. Să se arate că aplicația $<\ ,\ >:V\times V\to\mathbf{C}$ definită prin relația $<X,Y> = \alpha_1\overline{\beta_1}+\alpha_2\overline{\beta_2}$ este un produs scalar. Generalizare pentru $V=\mathbf{C}^n$.

Indicație. Se raționează analog ca și la problema 1.

4. În spațiul unitar $V=\mathbf{C}^4$ considerăm subspațiul *S* generat de vectorii $X=(-i,1,-1,0)$ și $Y=(1,-1,-1,i)$. Să se arate că vectorul $Z=(1+i,1,i,0)$ este ortogonal pe orice vector din *S*.

Soluție. Dacă $U\in S$, atunci $U=\alpha\cdot X+\beta\cdot Y$ cu $\alpha,\beta\in\mathbf{C}$. Folosind proprietățile produsului scalar este suficient să arătăm că $<Z,X>=0$ și $<Z,Y>=0$. Dar $<Z,X>=i-1+1-i=0$ și $<Z,Y>=1+i-1-i=0$. Deci $<Z,U>=<Z,\alpha\cdot X+\beta\cdot Y>=\overline{\alpha}<Z,X>+\overline{\beta}<Z,Y>=0$ pentru orice $U\in S$.

5. Arătați că dacă $e_1,e_2,\dots,e_n$ sunt n vectori nenuli ortogonali doi câte doi într-un spațiu euclidian, atunci ei sunt liniar independenți.

Soluție. Dacă există $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n\in K$ astfel încât $\alpha_1\cdot e_1+\alpha_2\cdot e_2+\dots+\alpha_n\cdot e_n=0$, calculăm $<\alpha_1\cdot e_1+\alpha_2\cdot e_2+\dots+\alpha_n\cdot e_n, e_1> = <0,e_1> = 0$. De aici $0 = \alpha_1<e_1,e_1>+\alpha_2<e_2,e_1>+\dots+\alpha_n<e_n,e_1> = \alpha_1<e_1,e_1>$ și cum $<e_1,e_1>\ne 0$ rezultă că $\alpha_1 = 0$. Analog se arată că $\alpha_2=\alpha_3=\dots=\alpha_n=0$, deci vectorii $e_1,e_2,\dots,e_n$ sunt liniar independenți.

6. Considerând spațiul euclidian $V=\mathbf{R}^3$ să se construiască o bază ortogonală pornind de la baza $B=\{e_1=(1,0,2),e_2=(2,1,1),e_3=(0,1,1)\}$, folosind procedeul de ortogonalizare.

Soluție. Considerăm $f_1=e_1$, $f_2=e_2+\alpha\cdot f_1$, $f_3=e_3+\beta_1\cdot f_1+\beta_2\cdot f_2$ și vom determina pe α,β_1 și β_2 din condițiile $<f_1,f_2>=0$, $<f_1,f_3>=0$ și $<f_2,f_3>=0$. Astfel $<f_1,f_2> = <f_1,e_2+\alpha\cdot f_1> = <f_1,e_2>+\alpha<f_1,f_1> = 0$. Deci $\alpha=-\frac{<f_1,e_2>}{<f_1,f_1>}=-\frac{4}{5}$ și $f_2=e_2+\alpha\cdot f_1=(2,1,1)-\frac{4}{5}\cdot(1,0,2)=\left(\frac{6}{5},1,-\frac{3}{5}\right)$. Analog din $<f_1,f_3> = <f_1, e_3+\beta_1\cdot f_1+\beta_2\cdot f_2> = <f_1,e_3>+\beta_1<f_1,f_1>+\beta_2<f_1,f_2> = 0$, utilizând și faptul că $<f_1,f_2>=0$, deducem că $\beta_1=-\frac{<f_1,e_3>}{<f_1,f_1>}=-\frac{2}{5}$. Apoi din $<f_2,f_3> = <f_2, e_3+\beta_1\cdot f_1+\beta_2\cdot f_2> = <f_2,e_3>+\beta_1<f_2,f_1>+\beta_2<f_2,f_2> = 0$ rezultă că $\beta_2=-\frac{<f_2,e_3>}{<f_2,f_2>}=-\frac{2/5}{70/25}=-\frac{1}{7}$. De aici $f_3=e_3-\frac{2}{5}\cdot f_1-\frac{1}{7}\cdot f_2=\left(-\frac{4}{7},\frac{6}{7},\frac{2}{7}\right)$. Deci o bază ortogonală a lui V este $\{f_1=(1,0,2), f_2=\left(\frac{6}{5},1,-\frac{3}{5}\right), f_3=\left(-\frac{4}{7},\frac{6}{7},\frac{2}{7}\right)\}$.

7. În spațiul euclidian $V=\mathbf{R}^3$ să se găsească o bază ortonormată pornind de la baza:

a) $B=\{e_1=(1,1,1),e_2=(1,1,-1),e_3=(1,-1,-1)\}$;

b) $B=\{e_1=(1,0,1),e_2=(1,1,0),e_3=(1,1,1)\}$;

c) $B=\{e_1=(-1,0,2),e_2=(1,-1,1),e_3=(2,1,0)\}$.

Indicație. Se aplică metoda din problema 6 și apoi se normează vectorii găsiți.

Răspuns. a) $B'=\left\{f_1=\left(\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3}\right),f_2=\left(\frac{1}{\sqrt6},\frac{1}{\sqrt6},-\frac{2}{\sqrt6}\right),f_3=\left(\frac{1}{\sqrt2},-\frac{1}{\sqrt2},0\right)\right\}$;

b) $B'=\left\{f_1=\left(\frac{1}{\sqrt2},0,\frac{1}{\sqrt2}\right),f_2=\left(\frac{1}{\sqrt6},\frac{2}{\sqrt6},-\frac{1}{\sqrt6}\right),f_3=\left(-\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3}\right)\right\}$;

c) $B'=\left\{f_1=\left(-\frac{1}{\sqrt5},0,\frac{2}{\sqrt5}\right),f_2=\left(\frac{6}{\sqrt{70}},-\frac{5}{\sqrt{70}},\frac{3}{\sqrt{70}}\right),f_3=\left(\frac{2}{\sqrt{14}},\frac{3}{\sqrt{14}},\frac{1}{\sqrt{14}}\right)\right\}$.

8. În spațiul euclidian $V=\mathbf{R}^4$ se consideră vectorii $e_1=\left(\frac12,\frac12,\frac12,\frac12\right)$ și $e_2=\left(\frac16,\frac16,\frac12,-\frac56\right)$. Să se verifice că cei doi vectori au norma egală cu unu și sunt ortogonali. Să se construiască apoi o bază ortonormată a acestui spațiu care conține vectorii e_1 și e_2.

Răspuns. Problema nu are soluție unică. Luând de exemplu $e_3=(1,0,0,0)$ și $e_4=(0,1,0,0)$ și aplicând procedeul de ortonormalizare bazei $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ găsim $f_1=e_1$, $f_2=e_2$, $f_3=\sqrt{\frac{18}{13}}\cdot\left(\frac{13}{18},-\frac{5}{18},-\frac{1}{3},-\frac{1}{9}\right)$, $f_4=\sqrt{\frac{13}{8}}\cdot\left(0,\frac{8}{13},-\frac{6}{13},-\frac{2}{13}\right)$.

9. Considerăm V spaţiul vectorial real al polinoamelor de o variabilă, cu coeficienţi reali şi de grad mai mic sau egal cu doi, adunarea şi înmulţirea cu scalari fiind definite în mod obişnuit. Dacă $X(t),Y(t)\in V$, definim $<X(t),Y(t)> = \int_{-1}^{1} X(t)Y(t)dt$. Să se arate că relativ la această aplicaţie V devine spaţiu euclidian. Generalizare pentru polinoamele de grad mai mic sau egal cu n.

Soluţie. Vom verifica axomele produsului scalar.

a) $<\alpha\cdot X(t)+\beta\cdot Y(t),Z(t)>=\int_{-1}^{1}(\alpha X(t)+\beta Y(t))Z(t)dt = \alpha\int_{-1}^{1}X(t)Z(t)dt+\beta\int_{-1}^{1}Y(t)Z(t)dt =$ $\alpha<X(t),Z(t)>+ \beta<Y(t),Z(t)>$;

b) $<X(t),Y(t)> = \int_{-1}^{1}X(t)Y(t)dt =<Y(t),X(t)>$;

c) $<X(t),X(t)> = \int_{-1}^{1}X^2(t)dt\geq 0$ deoarece $X^2(t)\geq 0$ şi dacă $X(t)\equiv 0$ evident $<X(t),X(t)> = 0$. Reciproca acestei ultime afirmaţii o putem demonstra observând că X(t) fiind un polinom nenul de grad cel mult egal cu doi el are cel mult două rădacini reale. Deci putem găsi un interval $[a,b]\subset[-1,1]$ unde X(t) nu se anulează. Dacă $<X(t),X(t)> = 0$, iar X(t) nu este identic nul, atunci $0 = \int_{-1}^{a}X^2(t)dt+\int_{a}^{b}X^2(t)dt + \int_{b}^{1}X^2(t)dt \geq 0$, deoarece $X^2(t)\geq 0$. Dar conform teoremei de medie există $c\in[a,b]$ astfel încât $\int_{a}^{b}X^2(t)dt = X^2(c)(b-a)>0$, deoarece X(t) nu se anulează în intervalul [a,b]. Am

obţinut astfel o contradicţie, deci $X(t)\equiv 0$. Această afirmaţie se poate demonstra şi folosind proprităţile funcţiilor continue pe un interval închis.

Pentru generalizare se procedează analog.

10. În spaţiul euclidian al polinoamelor de grad mai mic sau egal cu doi să se găsească o bază ortonormată pornind de la baza $\{e_1=1,e_2=t,e_3=t^2\}$.

Indicaţie. Se va aplica metoda din problema 6 şi apoi se normează vectorii găsiţi.

Răspuns. $f_1=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $f_2=\sqrt{\frac{3}{2}}t$, $f_3=\frac{\sqrt{10}}{4}(-1+3t^2)$.

11. În spaţiul euclidian al polinoamelor de grad mai mic sau egal cu trei să se găsească o bază ortonormată pornind de la baza $\{e_1=1,e_2=t+2,e_3=t^2,e_4=t^3\}$.

Răspuns. $f_1=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $f_2=\sqrt{\frac{3}{2}}t$, $f_3=\frac{\sqrt{10}}{4}(-1+3t^2)$, $f_4=\frac{\sqrt{14}}{4}(-3t+5t^3)$.

12. Fie V spaţiul vectorial real al polinoamelor trigonometrice de forma $X(t)=\alpha_0 + \alpha_1\cos t+\beta_1\sin t+\ldots+\alpha_n\cos nt+\beta_n\sin nt$, unde n este fixat $\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n$ sunt numere reale iar $t\in[-\pi,\pi]$. Definind $<X(t),Y(t)>=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(t)Y(t)dt$ să se arate că:

a) relativ la această aplicaţie V devine spaţiu euclidian;

b) vectorii $\frac{1}{\sqrt{2}},\cos t,\sin t,\ldots,\cos nt,\sin nt$ formează o bază ortonormată a lui V.

(Aceste polinoame trigonometrice apar în teoria seriilor Fourier)

Indicaţie. La punctul a) se procedează ca şi la problema 9 iar la b) se observă vectorii consideraţi formează un sistem de generatori pentru V, sunt ortogonali doi câte doi şi au norma egală cu unu. Apoi se aplică problema 5.

13. Dacă V este un spaţiu euclidian iar $\{e_1,e_2,\ldots,e_n\}$ o bază ortogonală a sa, să se arate că oricare ar fi vectorul $X\in V$ coordonatele lui în această bază sunt:

$$\alpha_i=\frac{<X,e_i>}{<e_i,e_i>},\quad i\in\{1,2,\ldots,n\}.$$

Soluţie. Dacă $X = \alpha_1\cdot e_1+\alpha_2\cdot e_2+\ldots+\alpha_n\cdot e_n$, este scrierea vectorului X în baza dată, atunci $<X,e_1>=\alpha_1<e_1,e_1>+\alpha_2<e_2,e_1>+\ldots+\alpha_n<e_n,e_1>$. Dar $<e_i,e_1> = 0$, dacă $i\neq 1$, deci obţinem $\alpha_1=\frac{<X,e_1>}{<e_1,e_1>}$. Celelalte coordonate se găsesc în acelaşi mod.

14. Considerând spaţiul euclidian $V=\mathbf{R}^3$ şi baza ortonormată formată din vectorii $e_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $e_2=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$ şi $e_3=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$ să se găsească coordonatele următorilor vectori în această bază: X=(2,3,4), Y=(-1,1,2) şi Z=(1,1,0).

Indicaţie. Se aplică rezultatul din problema 13.

Răspuns. $X=3\sqrt{3}\cdot e_1-\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot e_2-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot e_3$, $Y = \frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot e_1-\frac{2\sqrt{6}}{3}\cdot e_2-\sqrt{2}\cdot e_3$, $Z=\frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot e_1+\frac{\sqrt{6}}{3}\cdot e_2$.

15. Dacă V este spaţiul euclidian al polinoamelor de grad mai mic sau egal cu doi să se găsească coordonatele vectorilor $X=2-2t+t^2$, $Y=1-4t$ şi $Z=t^2$ în baza ortonormată formată din vectorii $e_1=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $e_2=\sqrt{\frac{3}{2}}t$, $e_3=\frac{\sqrt{10}}{4}(-1+3t^2)$.

Răspuns.

$$X=\frac{7\sqrt{2}}{3}\cdot e_1-\frac{2\sqrt{6}}{3}\cdot e_2+\frac{2\sqrt{10}}{15}\cdot e_3, Y=\sqrt{2}\cdot e_1-\frac{4\sqrt{6}}{3}\cdot e_2, Z=\frac{\sqrt{2}}{3}\cdot e_1+\frac{2\sqrt{10}}{15}\cdot e_3.$$

16. Fie V mulţimea şirurilor de numere reale de forma $X=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n,\ldots)$ cu proprietatea că seria $\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i^2$ este convergentă.

a) Să se arate că V formează spaţiu vectorial faţă de adunarea şi înmulţirea cu un număr real al şirurilor.

b) Dacă $Y=(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n,\ldots)\in V$ şi definim $<X,Y>=\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\beta_i$, să se arate că relativ la această aplicaţie V devine spaţiu euclidian.

c) Să se arate că vectorii $e_1 = (1,0,0,\ldots,0,\ldots)$, $e_2 = (0,1,0,\ldots,0,\ldots),\ldots,e_n = (0,0,0,\ldots,1,\ldots),\ldots$ au norma egală cu unu şi sunt ortogonali doi câte doi.

d) Dacă $X=\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ldots,\frac{1}{n},\ldots\right)$ şi $Y=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\ldots,\frac{1}{n+1},\ldots\right)$, să se calculeze $<X,Y>$.

(Acest spaţiu euclidian se utilizează în analiza matematică sub numele de spaţiul l_2).

Soluţie. a) Dacă $X,Y\in V$, atunci $X+Y=(\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2,\ldots,\alpha_n+\beta_n,\ldots)$ şi vom arăta că $X+Y\in V$. Aplicând inegalitatea Cauchy-Schwartz în spaţiul euclidian $\mathbf{R}^n$ pentru un n fixat, obţinem: $\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\beta_k\right)^2 \le \sum_{k=1}^{n}\alpha_k^2\sum_{k=1}^{n}\beta_k^2$. De aici $\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k+\beta_k)^2=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^2+2\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\beta_k+\sum_{k=1}^{n}\beta_k^2 \le \sum_{k=1}^{n}\alpha_k^2+2\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^2\sum_{k=1}^{n}\beta_k^2}+\sum_{k=1}^{n}\beta_k^2$ şi folosind convergenţa seriilor $\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^2$ şi $\sum_{k=1}^{n}\beta_k^2$ se deduce că seria cu termeni pozitivi $\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_k+\beta_k)^2$ are sumele parţiale mărginite, deci este convergentă şi $X+Y\in V$. Dacă $\alpha\in\mathbf{R}$ se defineşte $\alpha\cdot X=(\alpha\alpha_1,\alpha\alpha_2,\ldots,\alpha\alpha_n,\ldots)$ şi se arată uşor că $\alpha\cdot X\in V$. Axomele spaţiului vectorial se verifică luând $0_V=(0,0,0,\ldots,0,\ldots)$ şi $-X=(-\alpha_1,-\alpha_2,\ldots,-\alpha_n,\ldots)$, care aparţin lui V.

b) Faptul că aplicaţia $<X,Y>$ este bine definită, adică seria $\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\beta_i$ converge, rezultă din criteriul general de convergenţă al lui Cauchy şi din inegalitatea Cauchy-Schwartz analog ca şi la punctul a). Axiomele produsului scalar se verifică uşor.

c) Evident $e_1\in V$ şi $<e_1,e_1> = 1^2+0^2+\ldots = 1$, seria având sumele parţiale egale cu 1. Analog $<e_k,e_k> = 1$ pentru orice $k>1$. Apoi $<e_1,e_2> = 1\cdot0+0\cdot1+0\cdot0+\ldots = 0$ şi analog $<e_i,e_j> = 0$ dacă $i\neq j$.

d) $<X,Y> = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1.$

17. Considerăm V un spaţiu euclidian de dimensiune n şi U un subspaţiu vectorial al lui V. Notăm $U^{\perp}=\{X\in V; <X,Y>=0, \forall Y\in U\}$. Să se arate că:

a) $U^{\perp}$ este un subspaţiu vectorial al lui V;

b) $\dim U + \dim U^{\perp} = n$;

c) $U\cap U^{\perp}=\{0_V\}$ şi oricare ar fi $X\in V$ există $Y\in U$ şi $Z\in U^{\perp}$, unic determinaţi astfel încât $X=Y+Z$.

(Spaţiul $U^{\perp}$ se numeşte complementul ortogonal al lui U în V).

Soluţie. a) Dacă $X_1,X_2\in U^{\perp}$, şi α_1, $\alpha_2\in K$, $<\alpha_1\cdot X_1+\alpha_2\cdot X_2,Y> = \alpha_1<X_1,Y> + \alpha_2<X_2,Y> = 0$, pentru orice $Y\in V$. Deci $\alpha_1\cdot X_1+\alpha_2\cdot X_2\in U^{\perp}$ şi $U^{\perp}$ este un subspaţiu vectorial al lui V.

b) Cum U este el însuşi spaţiu euclidian considerăm o bază ortogonală $\{e_1,e_2,\ldots,e_t\}$ a lui U şi deasemenea $\{f_1,f_2,\ldots,f_s\}$ o bază ortogonală a lui $U^{\perp}$. Deoarece vectorii $e_1,e_2,\ldots,e_t,f_1,f_2,\ldots,f_s$ sunt nenuli şi ortogonali doi câte doi, cu ajutorul problemei 5 deducem că ei sunt liniar independenţi, deci $t+s\le n$. Considerând o bază a spaţiului V ce conţine pe $e_1,e_2,\ldots,e_t$ şi utilizând procedeul de ortogonalizare se obţine baza ortogonală $e_1,e_2,\ldots,e_t,e_{t+1},\ldots,e_n$ a spaţiului V. Atunci $e_{t+1},\ldots,e_n$ sunt n-t vectori liniari independenţi în $U^{\perp}$, deci $n-t\le s$, adică $n\le s+t$. Prin urmare $s+t=n$ şi $\{e_1,e_2,\ldots,e_t,f_1,f_2,\ldots,f_s\}$ este o bază a lui V.

c) Dacă $X\in U\cap U^{\perp}$, atunci $<X,X> = 0$, deci $X = 0_V$. Considerând baza lui V formată din vectorii $e_1,e_2,\ldots,e_t,f_1,f_2,\ldots,f_s$, construită la punctul b), orice vector $X\in V$

se poate scrie $X=\alpha_1\cdot e_1+\alpha_2\cdot e_2+\ldots+\alpha_t\cdot e_t+\beta_1\cdot f_1+\beta_2\cdot f_2+\ldots+\beta_s\cdot f_t$ şi este suficient să luăm $Y=\alpha_1\cdot e_1+\alpha_2\cdot e_2+\ldots+\alpha_t\cdot e_t$ şi $Z=\beta_1\cdot f_1+\beta_2\cdot f_2+\ldots+\beta_s\cdot f_t$. Dacă ar exista şi $Y_1\in U$ şi $Z_1\in U^{\perp}$ astfel încât $X=Y_1+Z_1=Y+Z$, atunci $Y-Y_1=Z_1-Z\in U\cap U^{\perp}$, deci $Y=Y_1$ şi $Z=Z_1$.

18. Dacă $V=\mathbf{R}^3$ este considerat ca spaţiu euclidian găsiţi complementele ortogonale ale următoarelor subspaţii:

a) U_1 este subspaţiul generat de $X=(1,0,0)$ şi $Y=(0,1,0)$;

b) U_2 este subspaţiul generat de $X=(1,1,1)$ şi $Y=(0,0,1)$ şi $Z=(1,1,0)$;

c) U_3 este subspaţiul generat de $X=(1,2,1)$ şi $Y=(3,6,3)$.

Indicaţie. a) Dacă $Z\in U_1$, atunci $Z=\alpha\cdot X+\beta\cdot Y=(\alpha,\beta,0)$ şi dacă $Z'\in U_1^{\perp}$, atunci $\forall Z\in U$, $<Z,Z'>=0$. Folosind proprietăţile produsului scalar se observă că este suficient ca $<X,Z'>=0$ şi $<Y,Z'>=0$. Dacă $Z'=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$, atunci din cele două condiţii găsim $\gamma_1=\gamma_2=0$.

Răspuns. a) $U_1^{\perp}=\{(0,0,\gamma),\gamma\in\mathbf{R}\}$; b) $U_2^{\perp}=\{(\gamma,-\gamma,0),\gamma\in\mathbf{R}\}$; c) $U_3^{\perp}=\{(\gamma_1,\gamma_2,-\gamma_1-2\gamma_2),\gamma_1,\gamma_2\in\mathbf{R}\}$.

19. Dacă $V=\mathbf{R}^2$ este considerat ca spaţiu euclidian real fie baza sa ortonormată formată din vectorii $e_1=(1,0)$ şi $e_2=(0,1)$. Specificaţi care dintre următoarele transformări liniare sunt ortogonale.

a) $T_1(e_1) = 2\cdot e_1 - e_2$

$T_1(e_2) = -e_1 + 2\cdot e_2$;

b) $T_2(e_1) = \cos\alpha\cdot e_1 + \sin\alpha\cdot e_2$

$T_2(e_2) = -\sin\alpha\cdot e_1 + \cos\alpha\cdot e_2$, unde $\alpha\in\mathbf{R}$;

c) $T_3(e_1) = e_1 - e_2$

$T_3(e_2) = e_1 + e_2$.

Răspuns. T_2 este singura transformare ortogonală.

20. Dacă $V=\mathbf{R}^3$ este considerat spaţiu euclidian iar $e_1=(1,0,0)$, $e_2=(0,1,0)$ şi $e_3=(0,0,1)$ formează baza sa canonică, verificaţi dacă următoarele transformări liniare sunt ortogonale.

a) $T_1(e_1) = e_1$

$T_1(e_2) = \frac{1}{2}\cdot e_2+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot e_3$

$T_1(e_3) = -\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot e_2+\frac{1}{2}\cdot e_3$;

b) $T_2(e_1) = e_1 + e_2$

$T_2(e_2) = e_2 + e_3$

$T_2(e_3) = e_3 + e_1$;

c) $T_3(e_1) = \frac{2}{3}\cdot e_1+\frac{2}{3}\cdot e_2-\frac{1}{3}\cdot e_3$

$T_3(e_2) = \frac{2}{3}\cdot e_1-\frac{1}{3}\cdot e_2+\frac{2}{3}\cdot e_3$

$T_3(e_3) = -\frac{1}{3}\cdot e_1+\frac{2}{3}\cdot e_2+\frac{2}{3}\cdot e_3$.

Răspuns. T_1 şi T_3 sunt transformări ortogonale iar T_2 nu este ortogonală.

21. Dacă V este spaţiul euclidian real al polinoamelor de grad mai mic sau egal cu doi definim $T:V\to V$ prin $T(X(t)) = \alpha\cdot X(t)$, unde $\alpha\in\mathbf{R}$ şi $X(t)\in V$. Să se determine α astfel încât T să fie o transformare liniară ortogonală.

Răspuns. $\alpha = \pm 1$.

22. Dacă V este un spaţiu euclidian real şi T o transformare liniară a sa, arătaţi că T este ortogonală dacă şi numai dacă $\|T(X)\| = \|X\|, \forall X\in V$.

Soluţie. Dacă T este ortogonală atunci $\langle T(X),T(Y)\rangle = \langle X,Y\rangle, \forall X,Y\in V$. Atunci luând Y=X obţinem $\langle T(X),T(X)\rangle = \langle X,X\rangle$, deci $\|T(X)\| = \|X\|, \forall X\in V$. Reciproc dacă $\|T(X)\| = \|X\|, \forall X\in V$, atunci $2\langle T(X),T(Y)\rangle = \langle T(X+Y),T(X+Y)\rangle - \langle T(X),T(X)\rangle - \langle T(Y),T(Y)\rangle = \|T(X+Y)\|^2 - \|T(X)\|^2 - \|T(Y)\|^2 = \|X+Y\|^2 - \|X\|^2 - \|Y\|^2 = \langle X+Y,X+Y\rangle - \langle X,X\rangle - \langle Y,Y\rangle = 2\langle X,Y\rangle$ şi cum X şi Y sunt arbitrari T este ortogonală.

23. Dacă V este un spaţiu euclidian real, fie $S = \{X\in V; \|X\| = 1\}$. Să se arate că dacă T este o transformare liniară ortogonală, atunci $T(S)\subseteq S$.

Indicaţie. Se aplică problema 22.

24. Dacă considerăm spaţiul euclidian $V=\mathbf{R}^3$ iar $\{e_1=(1,0,0), e_2=(0,1,0), e_3=(0,0,1)\}$ este baza sa canonică, specificaţi care dintre următoarele transformări liniare sunt autoadjuncte

a) $T_1(e_1) = e_1 - e_2 + e_3$
$T_1(e_2) = -e_1 + e_2 + e_3$
$T_1(e_3) = e_1 + e_2 + e_3$;

b) $T_2(e_1) = e_1 - e_2$
$T_2(e_2) = -e_1 + e_2 + e_3$
$T_2(e_3) = e_2 + e_3$;

c) $T_3(e_1) = e_1 + e_2$
$T_3(e_2) = e_1 - e_2 + e_3$
$T_3(e_3) = e_1 + e_3$.

Răspuns. Numai T_1 şi T_2 sunt autoadjuncte.

25. Dacă V este un spaţiu euclidian iar T este o transformare liniară ortogonală a sa şi $T\circ T$ este transformarea identică arătaţi că T este o transformare autoadjunctă.

Soluţie. Dacă $X,Y\in V$, $\langle T(X),Y\rangle = \langle T(X),(T\circ T)(Y)\rangle = \langle T(X),T(T(Y))\rangle = \langle X,T(Y)\rangle$, deoarece T este ortogonală.

26. Dacă V este un spaţiu euclidian de dimensiune n iar T este o transformare liniară autoadjunctă şi ortogonală a sa să se arate că $T\circ T$ este transformarea identică.

Indicaţie. Se consideră o bază ortonormată a lui V şi se utilizează proprietăţile matricei lui T.

§2. FORME BILINIARE ŞI PĂTRATICE.

Dacă V este un spaţiu vectorial real, o funcţie $F:V\times V\to\mathbf{R}$ se numeşte *formă biliniară* dacă satisface următoarele axiome:

a_1) $\forall X_1,X_2,Y\in V, \forall\alpha,\beta\in\mathbf{R}, F(\alpha\cdot X_1+\beta\cdot X_2,Y) = \alpha F(X_1,Y)+\beta F(X_2,Y)$;

a_2) $\forall X,Y_1,Y_2\in V, \forall\alpha,\beta\in\mathbf{R}, F(X,\alpha\cdot Y_1+\beta\cdot Y_2) = \alpha F(X,Y_1)+\beta F(X,Y_2)$.

O formă biliniară se numeşte *simetrică* dacă $F(X,Y) = F(Y,X), \forall X,Y\in V$ şi *antisimetrică* dacă $F(X,Y) = -F(Y,X), \forall X,Y\in V$. Dacă V este un spaţiu vectorial real de dimensiune n şi $B = \{e_1,e_2,\dots,e_n\}$ este o bază a sa, matricea formată cu elementele $a_{ij} = F(e_i,e_j)$, unde $i,j\in\{1,2,\dots,n\}$, se numeşte *matricea formei biliniare F în baza B.*

Se arată uşor că dacă $X = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\cdot e_i$ şi $Y = \sum_{j=1}^{n}\beta_j\cdot e_j$, atunci $F(X,Y) = \sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\alpha_i\beta_j$.

Considerând o formă biliniară simetrică F(X,Y), funcţia F dată prin relaţia $g(X) = F(X,X)$, $\forall X\in V$ se numeşte *formă pătratică*. O formă pătratică se numeşte *pozitiv definită* dacă $\forall X\in V$ nenul, $g(X) > 0$.

Dacă $X = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\cdot e_i$, atunci $g(X) = F(X,X) = \sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\alpha_i\alpha_j$. Se spune că forma pătratică g este redusă la *forma canonică* în baza B dacă $a_{ij} = F(e_i,e_j) = 0$, dacă $i\neq j$. În acest caz $g(X) = a_{11}\alpha_1^2 + a_{22}\alpha_2^2+\dots+a_{nn}\alpha_n^2$. Se demonstrează că orice formă pătratică se poate reduce în mai multe moduri la forma canonică dar în fiecare caz numărul de coeficienţilor (elementelor a_{ii}) care sunt pozitivi şi a celor care sunt negativi este acelaşi (*legea de inerţie*).

Prezentăm pentru început *metoda Jacobi* de reducere a unei forme pătratice la forma canonică. Dacă $g(X) = \sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\alpha_i\alpha_j$, în baza B, notăm:

$$D_1 = a_{11},\ D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{12} & a_{22}\end{vmatrix},\ D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{12} & a_{22} & a_{23}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33}\end{vmatrix},\dots,D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn}\end{vmatrix}.$$

În cazul când $D_i\neq 0, \forall i\in\{1,2,\dots,n\}$se arată că există o bază $B'=\{e'_1,e'_2,\dots,e'_n\}$ a lui V astfel încât pentru orice $X = \sum_{i=1}^{n}\beta_i\cdot e'_i\in V$ să avem $g(X) = \frac{1}{D_1}\beta_1^2 + \frac{D_1}{D_2}\beta_2^2+\dots+\frac{D_{n-1}}{D_n}\beta_n^2$.
Se demonstrează că matricea de trecere de la baza B la baza B' are în acest caz toate elementele de sub diagonala principală egale cu zero.

O altă metodă de reducere a unei forme pătratice la forma canonică este *metoda Gauss*, care constă în efectuarea de schimbări de coordonate ale unui vector arbitrar $X\in V$, prin transformări nesingulare, deci schimbând implicit şi baza iniţială astfel încât să se obţină pătrate. Ea constă în următoarele:

a) dacă în scrierea lui g în baza B există un indice i astfel încât $a_{ii}\neq 0$, atunci putem considera, de exemplu, i=1, deci $a_{11}\neq 0$. Atunci

$$g(X) = \frac{1}{a_{11}}(a_{11}\alpha_1 + E)^2 - \frac{E^2}{a_{11}} + \sum_{i,j=2}^{n}a_{ij}\alpha_i\alpha_j,\ E = a_{12}\alpha_2+\dots+a_{1n}\alpha_n$$

şi făcând schimbarea de coordonate

$$\begin{cases}\beta_1 = a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2+\dots+a_{1n}\alpha_n\\ \beta_2 = \alpha_2\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \beta_n = \alpha_n\end{cases}$$

se obține

$$g(X) = \frac{1}{a_{11}}\beta_1^2 + h(Y),$$

unde h este o formă pătratică definită pe un spațiu de dimensiune mai mică decât n.

b) Dacă $a_{ii} = 0$, $\forall i=1,2,\ldots,n$, fie $a_{ij} \neq 0$ care se poate alege după o renumerotare convenabilă să fie tocmai a_{12}. Atunci se face schimbarea de coordonate:

$$\begin{cases} \alpha_1 = \beta_1 + \beta_2 \\ \alpha_2 = \beta_1 - \beta_2 \\ \alpha_3 = \beta_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_n = \beta_n \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} \beta_1 = \dfrac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \\ \beta_2 = \dfrac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} \\ \beta_3 = \alpha_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \beta_n = \alpha_n \end{cases}$$

și astfel g(X) va avea coeficientul lui β_1^2 diferit de zero iar problema a fost redusă la cazul a).

In continuare se aplică aceeași metodă pentru forma pătratică h care are un număr mai mic de variabile ș.a.m.d. Se observă că schimbările de coordonate se fac prin matrice nesingulare, deci lor le corespund schimbări de baze ale spațiului V.

Dacă V este un spațiu euclidian pentru reducerea la forma canonică a unei forme pătratice se poate utiliza și *metoda transformărilor ortogonale*. Aceasta se bazează pe faptul că dacă B este o bază ortonormată a lui V, atunci endomorfismul T al lui V care are drept matrice în baza B matricea formei pătratice g este un operator autoadjunct. Deci există baza ortonormată B' a lui V formată din vectori proprii ai lui T. În plus, dacă $X = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \cdot e'_i$, atunci $g(X) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \beta_i^2$, unde λ_i sunt valorile proprii ale lui T. Menționăm că bazele B și B' fiind ortonormate matricea de trecere de la prima bază la a doua poate fi considerată ca matricea unei transformări ortogonale.

1. Fie V=**R** considerat ca spațiu vectorial real relativ la operațiile obișnuite cu numere reale. Să se specifice care dintre următoarele aplicații sunt forme biliniare:

a) $F_1(X,Y) = 2XY$;

b) $F_2(X,Y) = X+Y$;

c) $F_3(X,Y) = 3X$, $\forall X,Y \in \mathbf{R}$.

Indicație. a) Se verifică axiomele din definiția formei biliniare. De exemplu

a_1) $F_1(\alpha \cdot X+\beta \cdot Y,Z) = 2(\alpha X+\beta Y)Z = 2\alpha XZ + 2\beta YZ = \alpha F_1(X,Z) + \beta F_1(Y,Z)$, $\forall X,Y,Z \in V$, $\forall \alpha,\beta \in \mathbf{R}$.

Răspuns. F_1 este formă biliniară iar F_2 și F_2 nu sunt.

2. Considerăm V spațiul vectorial real al funcțiilor continue definite pe intervalul [-1,1] cu valori reale, adunarea funcțiilor și înmulțirea cu număr real fiind definite canonic. Să se specifice care dintre următoarele aplicații sunt forme biliniare:

a) $F_1(f,g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$;

b) $F_2(f,g) = f(0) + g(0)$;

c) $F_3(f,g) = \max_{x \in [-1,1]} \{f(x) \cdot g(x)\}$,

unde f și g sunt funcții din V.

Răspuns. F_1 este formă biliniară iar F_2 și F_2 nu sunt.

3. În spațiul vectorial real $V = \mathbf{R}^3$ se consideră formele biliniare:

a) $F_1(X,Y) = \alpha_1\beta_1+2\alpha_2\beta_2+3\alpha_3\beta_3$;

b) $F_2(X,Y) = \alpha_1\beta_1-\alpha_2\beta_3$;

c) $F_3(X,Y) = \alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_3+\alpha_3\beta_1$, unde $X = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ și $Y = (\beta_1,\beta_2,\beta_3)$. Să se găsească matricele acestor forme biliniare în baza $\{e_1=(1,1,1), e_2=(1,1,-1), e_3=(1,-1,-1)\}$ și să se specifice care dintre ele sunt simetrice.

Indicație. a) $a_{11} = F_1(e_1,e_1) = 1+2+3 = 6$; $a_{12} = F_1(e_1,e_2) = 1+2-3 = 0$, $a_{13} = F_1(e_1,e_3) = 1-2-3 = -4$, $a_{21} = F_1(e_2,e_1) = 1+2-3 = 0$ și analog se calculează celelalte elemente ale matricei.

Răspuns. a) $\begin{pmatrix} 6 & 0 & -4 \\ 0 & 6 & 2 \\ -4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ este simetrică; b) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ nu este simetrică;

c) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ nu este simetrică.

4. Fie V un spațiu vectorial real, F(X,Y) o formă biliniară definită pe V și $V_1=\{X \in V, F(X,Y) = 0, \forall Y \in V\}$, $V_2=\{Y \in V, F(X,Y) = 0, \forall X \in V\}$.

a) Să se arate că V_1 și V_2 sunt subspații vectoriale ale lui V;

b) Dacă $V=\mathbf{R}^2$ este considerat ca spațiu vectorial real în mod canonic, să se găsească subspațiile V_1 și V_2 pentru $F(X,Y) = \alpha_1\beta_1+2\alpha_1\beta_2+3\alpha_2\beta_1+6\alpha_2\beta_2$, $X=(\alpha_1,\alpha_2)$, $Y=(\beta_1,\beta_2)$.

Soluție. a) Dacă $X_1,X_2 \in V_1$, $\alpha,\beta \in \mathbf{R}$, atunci $F(\alpha \cdot X_1+\beta \cdot X_2,Y) = \alpha F(X_1,Y)+\beta F(X_2,Y) = 0$, deci $\alpha \cdot X_1+\beta \cdot X_2 \in V_1$ și V_1 este subspațiu vectorial. Analog se procedează pentru V_2.

b) Observăm că dacă $X \in V_1$, rezultă $F(X,e_1)=0$ și $F(X,e_2)=0$, unde $e_1=(1,0)$ și $e_2 = (0,1)$. Prin urmare $\alpha_1+3\alpha_2 = 0$ și $2\alpha_1+6\alpha_2 = 0$, adică $\alpha_1=-3\alpha_2$ și $X = (-3\alpha_2,\alpha_2)$. Reciproc $\forall X=(-3\alpha_2,\alpha_2)$, $F(X,Y) = 0$, $\forall Y \in V$, deci $X \in V_1$. Atunci $V_1 = \{(-3\alpha,\alpha), \alpha \in \mathbf{R}\}$ și analog $V_2 = \{(-2\beta,\beta), \beta \in \mathbf{R}\}$.

5. Să se reducă la forma canonică prin metoda Gauss, specificând și transformarea de coordonate care se efectuează, următoarele forme pătratice:

a) $g_1(X) = \alpha_1^2 + 5\alpha_2^2 - 4\alpha_3^2 + 2\alpha_1\alpha_2 - 4\alpha_1\alpha_3$;

b) $g_2(X) = 4\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 - 4\alpha_1\alpha_2 + 4\alpha_1\alpha_3 - 3\alpha_2\alpha_3$;

c) $g_3(X) = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_1$,

unde $X = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ reprezintă un vector arbitrar din $V = \mathbf{R}^3$.

Soluție. b) Ne situăm în cazul a) al metodei Gauss, deci fără a mai scoate factor comun pe a_{11} obținem $g_2(X) = (2\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3)^2 + 2\alpha_2\alpha_3 - 3\alpha_2\alpha_3 = (2\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3)^2 - \alpha_2\alpha_3$ și facem schimbarea de coordonate:

$$\begin{cases}\beta_1 = 2\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 \\ \beta_2 = \alpha_2 \\ \beta_3 = \alpha_3\end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases}\alpha_1 = \frac{1}{2}(\beta_1 + \beta_2 - \beta_3) \\ \alpha_2 = \beta_2 \\ \alpha_3 = \beta_3\end{cases}$$

Deci $g_2(X) = \beta_1^2 - \beta_2\beta_3$ şi conform cazului b) al metodei facem schimbarea de coordo-nate:

$$\begin{cases}\beta_1 = \gamma_1 \\ \beta_2 = \gamma_2 + \gamma_3 \\ \beta_3 = \gamma_2 - \gamma_3\end{cases}$$

De aici $g_2(X) = \gamma_1^2 - \gamma_2^2 + \gamma_3^2$ care reprezintă o formă canonică a formei pătratice. Compunând cele două schimbări de coordonate găsim:

$$\begin{cases}\alpha_1 = \frac{1}{2}(\gamma_1 + 2\gamma_3) \\ \alpha_2 = \gamma_2 + \gamma_3 \\ \alpha_3 = \gamma_2 - \gamma_3\end{cases},$$

care dă schimbarea de coordonate cerută.

Răspuns. Forma canonică nefiind unică specificăm doar numărul de coeficienţi pozitivi şi negativi: a) doi coeficienţi pozitivi şi unul negativ; c) un coeficient pozitiv şi doi negativi.

6. Să se reducă la forma canonică prin metoda Jacobi următoarele forme pătratice:

a) $g_1(X) = \alpha_1^2 + \alpha_3^2 + \alpha_1\alpha_2 + \alpha_3\alpha_4$;

b) $g_2(X) = \alpha_1^2 + \alpha_4^2 + \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_4 + \alpha_4\alpha_1$;

c) $g_3(X) = 3\alpha_1^2 + 2\alpha_2^2 - \alpha_3^2 - 2\alpha_4^2 + 2\alpha_1\alpha_2 - 4\alpha_2\alpha_3 + 2\alpha_2\alpha_4$,

unde $X = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ este un vector arbitrar din $\mathbf{R}^4$.

Soluţie. a) $D_1 = 1$; $D_2 = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4}$; $D_3 = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4}$; $D_4 = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{16}$. Prin urmare $g_1(X) = \beta_1^2 - 4\beta_2^2 + \beta_3^2 - 4\beta_4^2$.

Răspuns. b) $g_2(X) = \beta_1^2 - 4\beta_2^2 + \beta_3^2 + \beta_4^2$; c) $g_3(X) = \frac{1}{3}\beta_1^2 + \frac{3}{5}\beta_2^2 - \frac{5}{17}\beta_3^2 - \frac{17}{37}\beta_4^2$.

7. Considerăm spaţiul euclidian real $V = \mathbf{R}^3$ iar $B = \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$ baza sa canonică. Dacă $X = \alpha_1 \cdot e_1 + \alpha_2 \cdot e_2 + \alpha_3 \cdot e_3 = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ este un vector arbitrar din V, să se reducă la forma canonică, folosind metoda transformărilor ortogonale, următoarele forme pătratice:

a) $g_1(X) = 2\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_2\alpha_3 + 2\alpha_1\alpha_3$;

b) $g_2(X) = 2\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - 4\alpha_1\alpha_2 - 4\alpha_2\alpha_3$;

c) $g_3(X) = 3\alpha_1^2 + 3\alpha_2^2 + 3\alpha_3^2 + 2\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_2\alpha_3 + 2\alpha_1\alpha_3$;

d) $g_4(X) = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 - 2\alpha_1\alpha_2 - 2\alpha_2\alpha_3 - 2\alpha_1\alpha_3$;

e) $g_5(X) = \alpha_1^2 + 2\alpha_2^2 + 3\alpha_3^2 - 4\alpha_1\alpha_2 - 4\alpha_2\alpha_3$.

Să se specifice în ficare caz matricea schimbării de bază şi să se menţioneze care forme pătratice sunt pozitiv definite.

Soluţie. a) Matricea formei pătratice g_1 în baza B este $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Vom calcula valorile proprii ale transformării liniare T care în baza B are aceeaşi matrice ca şi g_1. Polinomul caracteristic este $\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda + 2 = -(\lambda+1)^2(\lambda - 2)$ iar valorile proprii sunt $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = \lambda_3 = -1$. Forma canonică este deci $g_1(X) = 2\beta_1^2 - \beta_2^2 - \beta_3^2$, unde $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ sunt coordonatele vectorului X într-o baza ortonormată $B' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$ a lui V formată din vectori proprii ai lui T. Dacă $X = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ este un vector propriu corespunzător valorii proprii $\lambda = 2$, atunci:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix}.$$

Obţinem astfel sistemul compatibil nedeterminat

$$\begin{cases} -2\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 0 \\ \gamma_1 - 2\gamma_2 + \gamma_3 = 0 \\ \gamma_1 + \gamma_2 - 2\gamma_3 = 0 \end{cases}.$$

Alegând $\gamma_3 = 1$ rezultă $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$, deci $X = (1,1,1)$. Normând acest vector găsim $e'_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. Procedând analog pentru $\lambda = -1$ obţinem un sistem care se reduce la ecuaţia $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 0$. Dacă considerăm $\gamma_3 = 0$, găsim $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = -1$, deci $e'_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$. Vom alege e'_3 să fie tot vector propriu corespunzător lui $\lambda = -1$ şi astfel încât $B' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$ să fie o bază ortonormată a lui V. Cum vectorii proprii corespunzători valorilor proprii distincte sunt ortogonali rămân condiţiile $\langle e'_2, e'_3 \rangle = 0$ şi $\|e'_3\| = 1$. Putem alege atunci , de exemplu, $e'_3 = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$. Deci matricea schimbării de bază este:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

Evident baza B' poate fi aleasă în mai multe moduri iar g_1 nu este pozitiv definită deoarece $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$.

Răspuns. b) $g_2(X) = -2\beta_1^2 + \beta_2^2 + 4\beta_3^2$; c) $g_3(X) = 2\beta_1^2 + 2\beta_2^2 + 5\beta_3^2$; d) $g_4(X) = -\beta_1^2 + 2\beta_2^2 + 2\beta_3^2$; e) $g_5(X) = -\beta_1^2 + 2\beta_2^2 + 5\beta_3^2$; g_3 este singura formă pătratică pozitiv definită.

8. Considerăm spațiul euclidian $V = \mathbf{R}^4$ și baza sa ortonormată $B = \{e_1=(1,0,0,0), e_2=(0,1,0,0), e_3=(0,0,1,0), e_4=(0,0,0,1)\}$. Dacă $X=\alpha_1 \cdot e_1 + \alpha_2 \cdot e_2 + \alpha_3 \cdot e_3 + \alpha_4 \cdot e_4 = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4) \in V$, să se reducă la forma canonică, folosind metoda transformărilor ortogonale, următoarele forme pătratice:

a) $g_1(X) = 2\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_3\alpha_4$;

b) $g_2(X) = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_4 + \alpha_1\alpha_4$;

c) $g_3(X) = 2\alpha_1^2 + 2\alpha_2^2 + 2\alpha_3^2 + 2\alpha_4^2 - 4\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_2\alpha_3 - 4\alpha_3\alpha_4 + 2\alpha_1\alpha_4$.

Răspuns. Exceptând o permutare a coordonatelor formele canonice sunt:

a) $g_1(X) = \beta_1^2 + \beta_2^2 - \beta_3^2 - \beta_4^2$;

b) $g_2(X) = \beta_1^2 - \beta_2^2$;

c) $g_3(X) = -\beta_1^2 + \beta_2^2 + 3\beta_3^2 + 5\beta_4^2$.

9. Fie V un spațiu vectorial real iar l_1 și l_2 două funcționale liniare definite pe V cu valori reale.

a) Să se arate că dacă $l_1(X) \cdot l_2(X) = 0, \forall X \in V$, atunci cel puțin una dintre funcționale este identic nulă.

b) Dacă formă biliniară $F(X,Y) = l_1(X) \cdot l_2(Y)$ este simetrică să se arate că $F(X,Y) = \alpha \cdot l(X) \cdot l(Y)$ unde $\alpha \in \mathbf{R}$ iar l este o funcțională liniară definită pe V cu valori reale.

Soluție. a) Dacă există X_1 și X_2 din V astfel încât $l_1(X_1) \neq 0$ și $l_2(X_2) \neq 0$, atunci $l_1(X_1 + X_2) \cdot l_2(X_1 + X_2) = 0$. Dar $l_1(X_1 + X_2) = l_1(X_1) + l_1(X_2)$ și $l_2(X_1 + X_2) = l_2(X_1) + l_2(X_2)$, deci $(l_1(X_1) + l_1(X_2)) \cdot (l_2(X_1) + l_2(X_2)) = 0$. Deoarece $l_1(X_1) \cdot l_2(X_1) = 0$ și $l_1(X_2) \cdot l_2(X_2) = 0$ din egalitatea de mai sus deducem că $l_1(X_2) \cdot l_2(X_1) + l_1(X_1) \cdot l_2(X_2) = 0$. Inmulțind relația cu $l_1(X_1)$ și ținând cont că $l_1(X_1) \cdot l_2(X_1) = 0$ obținem $l_1(X_1)^2 \cdot l_2(X_2) = 0$ ceea ce contrazice faptul că $l_1(X_1) \neq 0$ și $l_2(X_2) \neq 0$. Deci cel puțin una dintre funcționalele l_1 și l_2 este identic nulă.

b) Dacă $F(X,Y) = 0$, $\forall X,Y \in V$, atunci se ia $\alpha=0$ și $l(X)=l_1(X)$ și afirmația este demonstrată. In caz contrar observăm că $\forall X,Y \in V$ cu proprietatea că $F(X,Y) \neq 0$, avem $\frac{l_1(X)}{l_2(X)} = \frac{l_1(Y)}{l_2(Y)} = \alpha \in \mathbf{R}$, deoarece F este simetrică iar elementele X și Y se pot alege independente unul de altul. Apoi se observă că produsul $(l_1(X) - \alpha l_2(X)) l_2(X) = 0$, $\forall X \in V$ și aplicând punctul a) obținem $l_1(X) = \alpha l_2(X)$. Deci luând $l(X) = l_2(X)$ obținem $F(X,Y) = \alpha l(X) l(Y)$, egalitatea fiind valabilă $\forall X,Y \in V$.

10. Demonstrați că o formă biliniară antisimetrică $F(X,Y)$ neidentic nulă, definită pe un spațiu vectorial real V, nu se poate scrie sub forma $F(X,Y) = l_1(X) \cdot l_2(Y)$, cu l_1 și l_2 funcționale liniare definite pe V cu valori în **R**.

Indicație. Se folosește că F este antisimetrică, se ia X = Y și se ține cont de problema 9, punctul a).

CAPITOLUL V

PLANUL ȘI DREAPTA ÎN SPAȚIU

I. Tipuri de ecuații ale unui plan.

În acest capitol, în spa\iul $\mathbf{R}^3$, vom considera reperul cartezian $\left(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ fixat.

a) Ecuația generală (sau ecuația carteziană) a planului:

(1) $Ax + By + Cz + D = 0 \qquad A, B, C, D \in \mathbf{R}$.

b) Ecuația planului prin tăieturi:

(2) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \; a, b, c \in \mathbf{R}$

Ecuația planului poate fi scrisă sub forma (2) dacă planul nu este paralel cu nici o axă de coordonate.

c) Ecuația unui plan determinat de un punct $M_0(x_0,y_0,z_0)$ și o direcție perpendiculară pe el $\left(\vec{n} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}\right)$:

(3) $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$

În acest caz vectorul $\vec{n}$ se numește *vectorul normal al planului.*

d) Ecuația planului ce conține punctul $M_0(x_0,y_0,z_0)$ și este paralel cu direcțiile neparalele $\vec{d_1} = l_1\vec{i} + m_1\vec{j} + n_1\vec{k}$ **și** $\vec{d_2} = l_2\vec{i} + m_2\vec{j} + n_2\vec{k}$ (numiți *vectori directori* ai **planului):**

(4) $\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0$

e) Ecuația planului determinat de trei puncte $M_1(x_1,y_1,z_1)$; $M_2(x_2,y_2,z_2)$; $M_3(x_3,y_3,z_3)$ necoliniare:

$$(5)\qquad \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$$

f) Ecuațiile parametrice ale unui plan

$$(6)\qquad \begin{cases} x=u \\ y=v \\ z=au+bv+c \end{cases} \quad ;u,v\in\mathbf{R} \qquad (a,b,c\in\mathbf{R}\ \text{date})$$

Un plan poate fi reprezentat parametric sub forma (6) dacă nu este paralel cu axa 0z. În caz contrar se consideră reprezentarea:

$$(7)\qquad \begin{cases} x=u \\ y=au+b \\ z=v \end{cases} \quad ;\ u,v\in\mathbf{R}\ \text{parametri}$$

sau

$$\begin{cases} x=au+b \\ y=u \\ z=v \end{cases}$$

II. Tipuri de ecuații ale unei drepte în spațiu

a) Ecuațiile dreptei ca intersecție a două plane distincte și neparalele:

$$(8)\qquad \begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, & A_1,B_1,C_1\in\mathbf{R} \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0, & A_2,B_2,C_2\in\mathbf{R} \end{cases}$$

b) Ecuațiile carteziene ale dreptei ce trece prin punctul $M_0(x_0,y_0,z_0)$ și este paralelă cu direcția lui $\vec{v}=l\,\vec{i}+m\,\vec{j}+n\,\vec{k}$ (numite *ecuațiile canonice* ale dreptei):

$$(9)\qquad \frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}.$$

Vectorul $\vec{v}$ se numește *vectorul director* al dreptei.

M_1 $\overline{v}$

M_1 M_2

c) Ecuațiile parametrice ale unei drepte:

$$(10)\qquad \begin{cases} x-x_0=lt \\ y-y_0=mt \\ z-z_0=nt \end{cases} \qquad t\in\mathbf{R}$$

d) Ecuațiile carteziene ale unei drepte determinate de două puncte $M_1(x_1,y_1,z_1)$ și $M_2(x_2,y_2,z_2)$:

$$(11)\qquad \frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

III. Fascicole de plane

Numim *fascicol de plane* mulțimea planelor care conțin o dreaptă dată (d), numită *axa fascicolului.*

Dacă dreapta (d) este definită ca intersecția a două plane distincte și neparalele (8), atunci ecuația fascicolului de plane este:

$$(12)\qquad \alpha(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\beta(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0,\ \alpha,\beta\in\mathbf{R}\ \text{arbitrare dar nu simultan nule.}$$

Dacă din fascicolul de plane scoatem planul de ecuație $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ atunci ecuația fascicolului de plane devine:

$$(13)\qquad A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0, \qquad \lambda\in\mathbf{R}$$

IV. Unghiuri și distanțe

a) Unghiul a două drepte

Dacă (d_1) și (d_2) sunt două drepte care au ecuațiile canonice:

$$(d_1)\qquad \frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1},$$

$$(d_2)\qquad \frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2},$$

și θ este unghiul format de cele două drepte, atunci

(14) $$\cos\theta = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}.$$

Dreptele (d_1) şi (d_2) sunt perpendiculare dacă şi numai dacă $l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$.

b) **Unghiul a două plane**

Dacă (P_1) şi (P_2) sunt două plane distincte de ecuaţii

$$(P_1) \quad A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0\ ,$$
$$(P_2) \quad A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$$

şi θ unghiul dintre cele două plane atunci

(15) $$\cos\theta = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Planele (P_1) şi (P_2) sunt perpendiculare dacă şi numai dacă $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$.

c) **Unghiul dintre o dreaptă şi un plan**

Dacă (d) este o dreaptă având ecuaţiile canonice (9), (P) un plan având ecuaţia generală (1) şi θ este unghiul format de dreapta (d) cu planul(P), atunci

(16) $$\sin\theta = \frac{Al + Bm + Cn}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}.$$

d) **Distanţa de la un punct la un plan**

Dacă (P) este un plan de ecuaţie (1) şi $M_0(x_0,y_0,z_0)$ este un punct dat, atunci distanţa de la punctul M_0 la planul (P) este dată de formula:

(17) $$d(M_0,(P)) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

e) **Distanţa de la un punct la o dreaptă**

Dacă (d) este o dreaptă având ecuaţiile canonice (9) şi $M_0(x_0,y_0,z_0)$ este un punct dat, atunci distanţa de la punctul M_0 la dreapta (d) este dată de formula:

(18) $$d(M_0,(d)) = \frac{\left\|\overrightarrow{M_1M_0} \times \vec{V}\right\|}{\left\|\vec{V}\right\|},$$

unde $M_1(x_1,y_1,z_1)$ este un punct de pe dreapta (d) şi $\vec{V} = l\,\vec{i} + m\,\vec{j} + n\,\vec{k}$.

f) **Distanţa dintre două drepte neparalele în spaţiu**

Dacă (d_1) şi (d_2) sunt două drepte neparalele care au ecuaţiile canonice

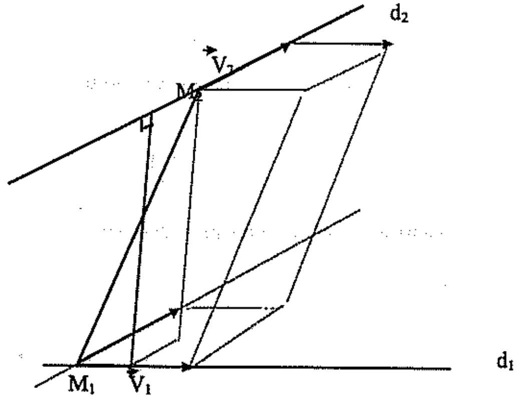
$$(d_1) \quad \frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1},$$

$$(d_2) \quad \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2},$$

şi $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$, $\vec{V_1} = l_1\,\vec{i} + m_1\,\vec{j} + n_1\,\vec{k}$, $\vec{V_2} = l_2\,\vec{i} + m_2\,\vec{j} + n_2\,\vec{k}$, atunci distanţa dintre dreptele (d_1) şi (d_2) (măsurată pe perpendiculara comună) este dată de formula

(19) $$d((d_1),(d_2)) = \frac{\left|\left(\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{V_1}, \vec{V_2}\right)\right|}{\left\|\vec{V_1} \times \vec{V_2}\right\|},$$

unde $\left(\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{V_1}\, \vec{V_2}\right)$ reprezintă produsul mixt al vectorilor $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\vec{V_1}$, $\vec{V_2}$.



PROBLEME

1. Să se scrie ecuaţia carteziană a planului ce trece prin punctul M(1,-1,2) şi este perpendicular pe axa Ox.

Soluţie: Vectorul $\vec{n} = \vec{i}$ este perpendicular pe plan. Aşadar A=1, B=0, C=0. Din ecuaţia (3) obţinem x-1=0 ecuaţia carteziană a planului.

2. Să se scrie ecuaţia carteziană a planului care trece prin punctele: A(1,0,0) , B(0,2,0) , C(0,0,3) .

Răspuns: $x + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} - 1 = 0$.

3. Să se scrie ecuaţia planului determinat de punctele A(-1,2,3) ; B(3,2,-1) ; C(-1,-1,-3) .

Răspuns: x-2y+z+2=0 .

4. Să se scrie ecuaţia planului care trece prin punctul P(1,-3,-2) şi care determină pe axele Oy şi Oz segmente egale respectiv de lungime 2 şi -3 .

Răspuns : 11x+3y-2z-6=0 .

5. Să se scrie ecuaţia planului ştiind că punctul P(3,-5,2) este piciorul perpendicularei coborâtă din origine pe acest plan.

Răspuns: 3x-5y+2z-38=0 .

6. Să se scrie ecuaţia planuluicare trece prin punctul A(1,2,-1) şi este paralel cu direcţiile $\vec{V}_1(-1,-2,1)$ şi $\vec{V}_2(2,1,-3)$.

Răspuns: 5x-y+3z=0 .

7. Să se dea o reprezentare parametrică a planului de ecuaţie x+y+z+4=0.

Răspuns: $\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = -4 - u - v \end{cases}, u, v \in \mathbf{R}$.

8. Să se dea o reprezentare parametrică a planului de ecuaţie x-2y+5=0 .

Răspuns: $\begin{cases} x = 2u - 5 \\ y = u \\ z = v \end{cases}, u, v \in \mathbf{R}$.

9. Să se scrie ecuaţia carteziană a unui plan care trece prin punctul A(1,-1,2) şi are ca vectori directori $\vec{u} = (1,-1,0)$, $\vec{V} = (2,1,-1)$.

Indicaţie: Folosind ecuaţia (4) obţinem:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 .$$

Răspuns: x+y+3z-6=0 .

10. Să se scrie ecuaţia planului care trece prin punctul A(1,-1,2) şi este paralel cu planul yOz.

Soluţie: Deoarece planul este paralel cu yOz avem că vectorii $\vec{j}$ şi $\vec{k}$ sunt vectori directori ai planului. Folosind ecuaţia (4) obţinem:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 .$$

Răspuns: x-1=0 .

11. Să se scrie ecuaţia carteziană a planului ce conţine dreapta

$$\begin{cases} x - y + z - 1 = 0 \\ 2x + y - z + 1 = 0 \end{cases}$$

şi este normal la vectorul $\vec{n} = (1,1,-1)$.

Soluţie: Planul cerut face parte din fascicolul de plane:

(F_λ): (x-y+z-1)+λ(2x+y-z+1)=0

Deoarece $\vec{n} = (1,1,-1)$ este vector normal planului (F_λ) obţinem că vectorii $\vec{V} = (1+2\lambda, \ -1+\lambda, \ 1-\lambda)$ şi $\vec{n} = (1,1,-1)$ sunt paraleli. Deci $\frac{1+2\lambda}{1} = \frac{-1+\lambda}{1} = \frac{1-\lambda}{-1}$.

Se obţine λ = -2 şi x+y-z+1=0 .

12. Să se scrie ecuaţia planului care trece prin dreapta de ecuaţii 2x-y-z+1=0 şi x+y+2z+2=0 şi prin punctul P(1,2,-1) .

Răspuns: 4x-5y-7z-1=0 .

13. Să se scrie ecuaţia planului care trece prin punctul P(1,2,-1) şi prin dreapta:

$$(d) \quad \begin{cases} 2x - z + 1 = 0 \\ 3y + 2z - 2 = 0 \end{cases}$$

Răspuns: 2x-6y-5z+5=0 .

14. Să se scrie ecuația planului care trece prin intersecția planelor:

(P_1) x-2y-3z+2=0 și (P_2) 4x+y+5z+1=0

și este paralel cu axa Oz.

Răspuns: 17x-7y+13=0 .

15. Să se determine ecuația planului care trece prin dreapta:

$$(d)\quad \begin{cases} x+y+z-1=0 \\ 2x+y-2z-1=0 \end{cases}$$

și este perpendicular pe planul:

(P) 3x+2y-2z-1=0 .

Răspuns: 2x+3y+6z-3=0 .

X **16.** Să se scrie ecuația planului care conține dreapta:

(d) $\frac{x+5}{3}=\frac{y-2}{1}=\frac{z}{4}$ și este paralel cu planul

(P) x+y-z+15=0 .

Răspuns: x+y-z+3=0 .

17. Se dă dreapta de ecuații:

$$(d)\quad \begin{cases} 2x-3y+z-3=0 \\ x+3y+2z+1=0 \end{cases}$$

a) Să se găsească ecuația planului care conține dreapta dată și trece prin punctul M(1,-2,3) .

b) Să se găsească ecuația planului care conține dreapta dată și este paralel cu axa Ox .

Răspuns: a) 2x+15y+7z+7=0
b) 9y+3z+5=0

18. Să se scrie ecuația planului care trece prin origine, prin punctul A(1,2,3) și este perpendicular pe planul:

(P) $6x+5y-4z+7=0$.

Soluție: Vectorul normal al planului (P) este $\vec{n}=6\vec{i}+5\vec{j}-4\vec{k}$. Acest vector este paralel planului curent. Ecuația planului prin două puncte $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$ și paralel direcției $\vec{v}=l\,\vec{i}+m\,\vec{j}+n\,\vec{k}$ este

$$(20)\quad \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l & m & n \end{vmatrix}=0$$

Aplicând relația (20) pentru punctele O(0,0,0) , A(1,2,3) și vectorul $\vec{v}=\vec{n}$ obținem 23x-22y+7z=0.

19. Să se scrie ecuația fascicolului de plane care trece prin dreapta:

$$(d)\quad \begin{cases} 2x+y-3z+2=0 \\ x-4y+5z-12=0 \end{cases}$$

Să se determine planul din fascicol care:

a) Trece prin punctul A(2,1,3);

b) Originea axelor de coordonate aparține planului;

c) Este perpendicular pe planul (P) x+y+z=0.

Indicație: Ecuația fascicolului de plane este:

(F_λ) $2x+y-3z+2+\lambda(x-4y+5z-12)=0$

c) Două plane sunt perpendiculare dacă și numai dacă vectorii normali ai celor două plane sunt perpendiculari. Vectorul

$$\vec{n}_\lambda=(2+\lambda)\,\vec{i}+(1-4\lambda)\,\vec{j}+(5\lambda-3)\,\vec{k}$$

este vectorul normal al fascicolului (F_λ) iar vectorul $n_{(P)}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ este vectorul normal al planului (P). Din condiția de perpendicularitate a vectorilor $\vec{n}_\lambda$ și $n_{(P)}$ obținem ecuația:

$2+\lambda+1-4\lambda+5\lambda-3=0$

care are soluția $\lambda=0$. Înlocuind $\lambda=0$ în (F_λ) obținem 2x+y-3z+2=0.

Răspuns: a) 4x-7y+7z-22=0;
b) 13x+2y-13z=0 .

20. Să se scrie ecuația fascicolului de plane care trece prin dreapta:

$$(d)\quad \begin{cases} 4x-y+3z-1=0 \\ x+5y-z+2=0 \end{cases}$$

Să se determine din fascicol planul care:

a) Este paralel cu axa Oy;

b) Este perpendicular pe planul : (P) 2x-y+5z-3=0

Răspuns: a) 21x+14z-3=0;
b) 7x+14y+5=0 .

X **21.** Fie planul (P) 3x+2y-4z-3=0 și dreapta:

$$(d)\quad \begin{cases} 3x+2y-7=0 \\ z-1=0 \end{cases}$$

a) Să se arate că dreapta (d) este conținută în planul (P);

b) Să se scrie ecuația planului dus prin dreapta (d) și care este perpendicular pe planul (P).

Indicație: O dreaptă (d) dată ca intersecție a două plane

$$(d)\quad \begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$$

este conținută în planul (P) Ax+By+Cz+D=0

dacă matricea sistemului

$$\begin{cases} Ax+By+Cz+D=0 \\ A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$$

are rangul doi. În problema noastră matricea sistemului este $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ care evident are rangul doi. Punctul b) se rezolvă ca punctul c) al problemei precedente.

Răspuns: b) 12x+8y+13z-41=0.

22. Să se scrie ecuația planului care trece prin punctul M(1,2,-1) și este perpendicular pe dreapta :

$$(d)\ \begin{cases} 2x-y+3z-1=0 \\ 3x+y+z+2=0 \end{cases}$$

Soluție: Vectorii $\vec{n}_1 = 2\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$ și $\vec{n}_2 = 3\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ sunt vectorii normali ai celor două plane ce definesc dreapta (d). Deoarece vectorul $\vec{v} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = -4\vec{i}+7\vec{j}+5\vec{k}$ dă direcția dreptei (d) și este vectorul normal al planului cerut din ecuația (3) obținem 4x-7y-5z+5=0.

23. Să se scrie ecuația planului determinat de dreptele paralele:

$$(d_1)\ \frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+3}{2}$$

$$(d_2)\ \frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-1}{2}$$

Indicație: Dreptele (d_1) și (d_2) sunt paralele cu vectorul $\vec{v} = 2\vec{i}+3\vec{j}+2\vec{k}$. Se aplică relația (20) pentru M_1(-1,2,-3), M_2(3,-1,1) și vectorul $\vec{v}$.

Răspuns: x-z-2=0 .

24. Se dau dreptele:

$$(d_1)\ \frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z+2}{1}$$

$$(d_2)\ \frac{x-1}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z+2}{5}$$

a) Să se scrie ecuația planului care se sprijină pe cele două drepte;

b) Să se scrie cosinusurile directoare ale normalei la planul de la punctul a).

Indicație: a) Dreptele (d_1) și (d_2) se intersectează în punctul A(1,0,-2). Se folosește euația (4), pentru punctul A și direc\iile $\vec{v}_1 = 2\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}$ și $\vec{v}_2 = 3\vec{i}+2\vec{j}+5\vec{k}$. Se obține ecuația 13x-7y-5z-23=0.

b) Cosinusurile directoare ale unui vector $\vec{v} = l\vec{i}+m\vec{j}+n\vec{k}$ sunt:

$$(21)\ \cos\alpha = \frac{\vec{v}\cdot\vec{i}}{|\vec{v}|} = \frac{l}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}},\quad \cos\beta = \frac{\vec{v}\cdot\vec{j}}{|\vec{v}|} = \frac{m}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{\vec{v}\cdot\vec{k}}{|\vec{v}|} = \frac{n}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$$

unde α, β, γ sunt unghiurile făcute de $\vec{v}$ cu axele 0x, 0y, și 0z.

Răspuns: b) $\cos\alpha = \frac{13}{\sqrt{243}}$; $\cos\beta = \frac{-7}{\sqrt{243}}$; $\cos\gamma = -\frac{5}{\sqrt{243}}$.

25. Se consideră punctele A(1,1,0), B(1,0,-1), C(-1,λ,2), D(2,3,2). Să se determine λ real astfel ca punctele să fie coplanare precum și ecuația carteziană a planului lor.

Indicație: Se scrie ecuația planului prin punctele A, B, D și apoi se inpune condiția ca C să aparțină acestui plan.

Răspuns: λ =3 .

26. Se dau punctele A(1,2,3), B(-2,1,4). Să se determine:

a) Ecuațiile carteziene ale dreptei AB;

b) Ecuațiile parametrice ale dreptei AB;

c) Cosinusurile directoare ale dreptei AB.

Răspuns: a) $\frac{x-1}{-2-1}=\frac{y-2}{1-2}=\frac{z-3}{4-3}$ sau $\frac{x-1}{-3}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-3}{1}$.

b) x=1-3t, y=2-t, z=3+t, $t \in \mathbb{R}$

c) $\cos\alpha = \frac{l}{\pm\sqrt{l^2+m^2+n^2}} = -\frac{3}{\pm\sqrt{11}}$, $\cos\beta = \frac{m}{\pm\sqrt{l^2+m^2+n^2}} = -\frac{1}{\pm\sqrt{11}}$,

$\cos\gamma = \frac{n}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}} = \frac{1}{\pm\sqrt{11}}$,

27. Să se determine vectorul director al dreptei:

$$(d)\ \begin{cases} 2x-y+z+4=0 \\ x+4y+3z-1=0 \end{cases}$$

și un punct de pe dreapta (d).

Soluție: Vectorul director al dreptei (d) este $\vec{v} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = -7\vec{i}-5\vec{i}+9\vec{k}$ unde $\vec{n}_1 = 2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{n}_2 = \vec{i}+4\vec{j}+3\vec{k}$ sunt vectorii normali la cele două plane ce definesc dreapta (d). Pentru a afla un punct de pe o dreaptă vom da o valoare arbitrară unei

variabile, de exemplu z=0 şi apoi rezolvăm sistemul rămas. Aşadar, pentru z=0, rezultă sistemul

$$\begin{cases} 2x-y=-4 \\ x+4y=1 \end{cases}$$

cu soluţia $x=-\frac{5}{3}$, $y=\frac{2}{3}$ şi deci un punct al dreptei este punctul $A\left(-\frac{5}{3},\frac{2}{3},0\right)$.

28. Să se scrie ecuaţiile canonice ale dreptei

$$(d)\ \begin{cases} x-2y+3z-1=0 \\ 2x+y-2z-3=0 \end{cases}$$

Soluţie: Procedând ca mai sus obţinem de exemplu A(1,-3,-2) un punct pe dreapta (d).

Vectorul director al dreptei (d) este $\vec{v}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}=\vec{i}+8\vec{j}+5\vec{k}$.

Ecuaţiile canonice ale dreptei (d) sunt date de (9). Obţinem: $\frac{x-1}{1}=\frac{y+3}{8}=\frac{z+2}{5}$.

29. Să se scrie ecuaţiile canonice ale dreptei (d) care trece prin punctul A(-1,2,3) şi este paralelă cu dreapta:

$$(d_1)\ \begin{cases} x-y-3z+2=0 \\ 2x-y+2z-3=0 \end{cases}.$$

Soluţie: Cum $\vec{n}_1=\vec{i}-\vec{j}-3\vec{k}$ şi $\vec{n}_2=2\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$ sunt vectorii normali la cele două plane ce definesc dreapta (d_1), rezultă că vectorul director al dreptei (d) este:

$$\vec{v}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}=-5\vec{i}-8\vec{j}+\vec{k}.$$

Deci $\frac{x+1}{-5}=\frac{y-2}{-8}=\frac{z-3}{1}$.

30. Să se scrie ecuaţiile dreptei care trece prin punctul M(2,-1,1) şi este paralelă cu dreapta:

$$(d)\ \begin{cases} x+y-z=0 \\ x+2y+z-1=0 \end{cases}$$

Răspuns: $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-1}{1}$.

31. Se dau planele:

(P_1) 2x+3y-4z+1=0;

(P_2) 4x-y+3z-4=0

şi punctul M(4,-3,5). Să se scrie ecuaţia dreptei care trece prin M şi este paralelă cu dreapta de intersecţie a celor două plane.

Răspuns: $\frac{x-4}{5}=\frac{y+3}{-22}=\frac{z-5}{-14}$.

32. Să se scrie ecuaţiile perpendicularei dusă din punctul M(-1,2,3) pe dreapta:

$$(d)\quad \frac{x+2}{3}=\frac{y-4}{1}=\frac{z}{1}$$

Soluţie: Se determină mai întâi planul (P) ce trece prin punctul M şi este perpendicular pe dreapta (d). Vectorul director al dreptei (d), $\vec{v}=3\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$, reprezintă vectorul normal la acest plan. Ecuaţia planului (P) este: 3(x+1) + (y-2) + (z-3) = 0. Aşadar (P) 3x+y+z-2=0. Proiecţia punctului M pe dreapta (d) este intersecţia dreptei (d) cu planul (P). Sistemul format din ecuaţiile lui (d) şi (P) este:

$$\begin{cases} 3x+y+z-2=0, \\ \frac{x+2}{3}=\frac{y-4}{1}=\frac{z}{1}. \end{cases}$$

Dacă folosim ecuaţiile parametrice ale dreptei (d) obţinem x=3t-2, y=t+4, z=t, care înlocuite în ecuaţia planului (P) dau $t=\frac{4}{11}$. Punctul $M_0\left(-\frac{10}{11},\frac{48}{11},\frac{4}{11}\right)$ reprezintă proiecţia lui M pe dreapta (d). Ecuaţiile carteziene ale dreptei MM_0 sunt:

$$\frac{x+1}{-\frac{10}{11}+1}=\frac{y-2}{\frac{48}{11}-2}=\frac{z-3}{\frac{4}{11}-3}\quad \text{sau}\quad \frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{26}=\frac{z-3}{-29}$$

33. Să se scrie ecuaţiile perpendicularei duse din punctul M(2,3,1) pe dreapta:

$$(d)\quad \frac{x+1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z-2}{3}.$$

Răspuns: $\frac{x-2}{3}=\frac{y-3}{3}=\frac{z-1}{-1}$

34. Se dă dreapta:

$$(d)\quad \frac{x-1}{3}=\frac{y}{-2}=\frac{z+1}{4}$$

şi punctul M(3,1,2). Se cer ecuaţiile dreptei perpendiculare din M pe (*d*).

Răspuns: $\frac{x-3}{10}=\frac{y-1}{61}=\frac{z-2}{23}$

35. Daţi o reprezentare parametrică a dreptei (*d*) având reprezentarea carteziană

$$(d)\ \begin{cases} x+y-z+1=0 \\ 2x-y+3z-4=0 \end{cases}.$$

Soluție: O dreaptă poate avea mai multe reprezentări parametrice. Se pot obține trei reprezentări parametrice luând ca parametru una din variabilele x, y, z. De exemplu, dacă z=t, atunci $x=\frac{-2}{3}t+1$, $y=\frac{5}{3}t-2$. Așadar avem reprezentarea parametrică:

$$\begin{cases} x=-\frac{2}{3}t+1, \\ y=\frac{5}{3}t-2, \qquad t\in\mathbf{R} \\ z=t \end{cases}$$

36. Să se afle punctul de intersecție al dreptei:

$$(d)\quad \frac{x-5}{3}=\frac{y+2}{-4}=\frac{z-1}{2}$$

cu planele xOy, xOz, yOz.

Soluție: Ecuația planului xOy este z=0. Înlocuind z=0 în ecuațiile dreptei (d) obținem $y=0$ și $x=\frac{7}{2}$. Așadar punctul de intersecție al dreptei (d) cu planul xOy este $A\left(\frac{7}{2},0,0\right)$. Deoarece punctul A se află pe axa Ox, rezultă că dreapta (d) intersectează și planul xOz în punctul A. Pentru a obține coordonatele punctului de intersecție al dreptei (d) cu planul yOz se rezolvă sistemul format din ecuația x=0 a planului yOz și ecuațiile dreptei (d). Se obține $B\left(0,\frac{14}{3},\frac{-7}{3}\right)$.

37. Să se arate că dreapta

$$(d)\quad \frac{x-2}{3}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-3}{4}$$

este situată în planul (P): 2x+2y-z+3=0.

Indicație: Se arată că punctul A(2,-2,3) se află în planul (P) și apoi se demonstrează că $\bar{n}\cdot\bar{v}=0$ unde $\bar{n}=2\bar{i}+2\bar{j}-\bar{k}$ este vectorul normal al planului (P), iar $\bar{v}=3\bar{i}-\bar{j}+4\bar{k}$ este vectorul director al dreptei (d).

38. Să se afle coordonatele simetricului punctului $M_0(1,1,1)$ față de dreapta:

$$(d)\quad \frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{2}=\frac{z+12}{-1}.$$

Soluție: Ca în problema 32 se determină coordonatele punctului A de intersecție al dreptei (d) cu planul (P) care trece prin punctul M_0 și este perpendicular pe dreapta (d). Ecuația planului (P) este:

(P): 2(x-1)+2(y-1)-(z-1)=0,

Se obține A(-1,-3,-11).

Pentru a determina coordonatele simetricului M_0' folosim legătura dintre coordonatele mijlocului A al segmentului M_0M_0' și coordonatele extremităților M_0 și M_0':

$$x_A=\frac{x_{M_0}+x_{M_0'}}{2},$$
$$y_A=\frac{y_{M_0}+y_{M_0'}}{2},$$
$$z_A=\frac{z_{M_0}+z_{M_0'}}{2}.$$

Se obține $M_0'(-3,-7,-23)$.

39. Să se afle proiecția punctului M(1,-1,2) pe dreapta:

$$(d)\quad \frac{x+3}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{-1}$$

Răspuns: $M'\left(-\frac{5}{3},\frac{5}{3},\frac{-2}{3}\right)$

40. Să se afle coordonatele simetricului punctului A(3,1,2) față de dreapta:

$$(d)\quad \frac{x-2}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{1}$$

Răspuns: $A'\left(\frac{37}{9},\frac{19}{9},\frac{-22}{9}\right)$.

41. Să se afle coordonatele simetricului punctului M(4,1,6) față de dreapta:

$$(d)\quad \begin{cases} x-y-4z+12=0 \\ 2x+y-2z+3=0 \end{cases}$$

Răspuns: M'(2,-3,2)

42. Se dau dreapta (d) $\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z}{1}$

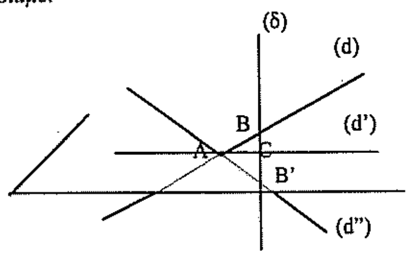
și planul

(P) x+y+z+1=0.

Să se determine:

a) ecuațiile proiecției ortigonale a dreptei (d) pe planul (P);
b) ecuațiile simetricei dreptei (d) față de planul (P).

Soluție:



a) Fie (d') proiecția dreptei (d) pe planul (P), care se obține prin intersecția planului (P) cu planul (Q) care trece prin (d) și este perpendicular pe planul (P).

Pentru a determina ecuația planului (Q) considerăm fascicolul de plane determinat de dreapta (d). Dreapta (d) are ecuațiile

$$(d)\quad \begin{cases} x-2z-1=0 \\ y-3z-1=0 \end{cases},\ \text{iar fascicolul de plane are ecuația}$$

(F_λ): $\quad (x-2z-1)+\lambda(y-3z-1)=0,\ \ \lambda\in\mathbf{R}$.

Impunând condiția $(F_\lambda)\perp(P)$ rezultă $\lambda=-\dfrac{1}{2}$. Deci (Q): 2x-y-z-1=0 și

$$(d')\quad \begin{cases} x+y+z+1=0 \\ 2x-y-z-1=0 \end{cases}$$

b) Rezolvând sistemul format din ecuațiile lui (d) și (P) obținem $A\left(0,-\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2}\right)$.

Pentru a obține ecuațiile simetricei (d"), a dreptei (d) față de planul (P) vom alege un alt punct $B\neq A,\ B\in(d)$, căruia îi determinăm simetricul B' față de planul (P). Atunci dreapta (d") este dreapta (AB'). Pentru z=0 obținem $B(1,1,0)\in(d)$. Intersectăm dreapta (δ) care trece prin B și este perpendiculară pe planul (P) cu planul (P). Obținem

$(\delta)\quad \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{1}$ și C(0,0,-1) unde C este proiecția lui B pe planul (P). Dacă B'(α,β,γ) este simetricul lui B față de planul (P), atunci din egalitățile: $0=\dfrac{1+\alpha}{2},\quad 0=\dfrac{1+\beta}{2},\quad -1=\dfrac{0+\gamma}{2}$, obținem B'(-1,-1,-2). Deci

$$(d'')\quad \frac{x+1}{\frac{1}{2}}=\frac{y+1}{\frac{1}{2}}=\frac{z+2}{\frac{3}{2}}.$$

43. Să se găsească proiecția punctului M(5,2,-1) pe planul:
(P) 2x-y+3z+23=0

Răspuns: M'(1,4,-7).

44. Să se afle coordonatele simetricului punctului $M_0(-1,2,2)$ față de planul
(P) 2x+y+3z-2=0.

Răspuns: $M_0'\left(-\dfrac{15}{7},\dfrac{10}{7},\dfrac{2}{7}\right)$.

45. Să se afle coordonatele simetricului punctului M(1,3,-4) față de planul
(P) 3x+y-2z=0

Răspuns: M'(-5,1,0).

46. Să se afle simetrica dreptei

$$(d)\quad \frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{1}$$

față de planul
(P) x+2y+z+3=0.

Răspuns: $\dfrac{3x-1}{1}=\dfrac{3y+7}{3}=\dfrac{3z+2}{2}$.

47. Să se scrie ecuațiile dreptei (d) care reprezintă proiecția dreptei:

$$(d_1)\quad \begin{cases} x+2y-z-1=0 \\ x-1=0 \end{cases}$$

pe planul:
(P) x+y+z=0.

Răspuns: $\begin{cases} x-2y+z-1=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$

48. Să se scrie ecuațiile dreptei (d) care reprezintă proiecția dreptei:

$$(d_1)\quad \frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{4}$$

pe planul:
(P) x+y+z-3=0..

Răspuns: $\begin{cases} x-2y+z=0 \\ x+y+z-3=0 \end{cases}$.

49. Să se scrie ecuațiile dreptei care trece prin proiecția punctului M(-1,2,2) pe planul:
(P) x+y+z+1=0
și care este paralelă cu planele:
(P_1) 2x-y-3z-1=0
(P_2) x+2y+3z+1=0.

Răspuns: $\dfrac{3x+7}{3}=\dfrac{3y-2}{-9}=\dfrac{3z-2}{5}$.

50. Să se scrie ecuațiile dreptei care trece prin proiecția punctului M(1,-1,2) pe planul:
(P) x+y+z-5=0
și care este paralelă cu planele:
(P_1) x-y=3 și
(P_2) 2x-2y+z=3.

Răspuns: $\begin{cases} x-y-2=0 \\ z-3=0 \end{cases}$.

51. Se dau punctele A(3,-1,3), B(5,1,-1) și C(0,4,-3). Să se determine măsura unghiului dintre dreapta(AB) și dreapta (AC).

Soluție: Avem $\bar{v}_{AB}=\bar{i}+\bar{j}-2\bar{k},\quad \bar{v}_{AC}=-3\bar{i}+5\bar{j}-6\bar{k}$. Dacă θ este unghiul dintre cele două drepte, atunci din formula (14), obținem $\theta=\arccos\sqrt{\dfrac{7}{15}}$.

52. Să se afle unghiul format de dreptele:

$$(d_1)\quad \begin{cases} x+2y+z-1=0 \\ x-2y+z+1=0 \end{cases}\ \text{și}\ (d_2)\quad \begin{cases} x-y-z-1=0 \\ x-y+2z-1=0 \end{cases}$$

Indicație: Vectorii directori ai dreptelor (d_1) și (d_2) sunt:

$$\vec{v}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{şi} \quad \vec{v}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}. \text{ Se obţine } \theta = \frac{\pi}{3}.$$

53. Fie planele:

(P) $2x-y-z-2=0$ şi

(Q) $x+2y+2z+1=0$.

Să se determine măsura unghiului dintre planele (P) şi (Q).

Indicaţie: Se foloseşte formula (15) şi se obţine

$$\theta = \arccos\left(-\frac{\sqrt{6}}{9}\right) = \pi - \arccos\left(\frac{\sqrt{6}}{9}\right).$$

54. Fie dreapta

$$(d) \begin{cases} x + 2y + 3z - 1 = 0 \\ 2x - y - z - 3 = 0 \end{cases}$$

şi planul

(P) $x+2y+2z+1=0$.

Să se determine măsura unghiului dintre dreapta (d) şi planul (P).

Indicaţie: Folosim formula (16). Obţinem $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{9}$

$\Rightarrow \theta = \arcsin\frac{\sqrt{3}}{9}$.

55. Să se afle unghiul pe care dreapta

$$(d) \quad \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-2} = \frac{z-1}{1}$$

îl face cu planul

(P) $3x-y+\sqrt{6}\,z-2=0$.

Răspuns: $\sin\alpha = \frac{8+\sqrt{6}}{12}$.

56. Să se afle unghiul dreptei

$$(d) \quad \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+2}{2}$$

cu planul

(P) $x+2y+z+1=0$.

Răspuns: $\sin\alpha = \frac{10}{\sqrt{102}}$.

57. Să se afle distanţa de la punctul $M(-2,1,3)$ la planul

(P) $x+2y-3z-2=0$.

Indicaţie: Folosim formula (17).

Răspuns: $d = \frac{11}{\sqrt{14}}$.

58. Să se afle distanţa de la punctul $M(-1,2,-1)$ la planul

(P) $5x-3y+2z+1=0$.

Răspuns: $d = \frac{12}{\sqrt{38}}$.

59. Să se calculeze distanţa dintre planele

(P_1) $11x-2y-10z-15=0$

şi

(P_2) $11x-2y-10z-45=0$.

Indicaţie: Planele (P_1) şi (P_2) sunt paralele. Se alege un punct într-un plan şi apoi se aplică formula (17).

Răspuns: 2.

60. Să se calculeze distanţa de la punctul $M_0(3,-2,1)$ la dreapta

$$(d) \quad \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-3}{3}.$$

Soluţie: Fie $M_1(1,-2,3)$ punctul prin care trece dreapta (d), obţinut prin egalarea cu 0 a rapoartelor ce definesc dreapta (d). Folosind formula (18), obţinem $d(M_0,(d)) = \frac{4}{7}\sqrt{21}$.

61. Să se afle distanţa de la punctul $M(7,9,7)$ la dreapta

$$(d) \quad \frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{2}.$$

Răspuns: $\sqrt{22}$.

62. Să se afle distanţa de la punctul $A(-1,1,1)$ la dreapta

$$(d) \begin{cases} x - 2y - z + 1 = 0 \\ 2x + y - z - 7 = 0 \end{cases}.$$

Răspuns: $\sqrt{\frac{486}{35}}$

63. Să se afle distanţa dintre dreptele paralele

$$(d_1) \quad \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{3}$$

şi

$$(d_2) \quad \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{3}.$$

Răspuns: $\frac{4\sqrt{35}}{7}$

64. Să se afle distanţa de la punctul $M(3,0,6)$ la dreapta

$$(d) \begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3x - 2z - 7 = 0 \end{cases}.$$

Răspuns: $2\sqrt{3}$.

65. Se dau dreptele

$$(d_1)\quad \frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{-4}=\frac{z}{-1}\quad \text{şi}$$

$$(d_2)\quad \frac{x}{3}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{2}.$$

Să se determine distanţa dintre (d_1) şi (d_2).

Soluţie: Avem $M_1(1,-2,0)\in(d_1)$, $M_2(0,0,1)\in(d_2)$ şi $\bar{v}_1=\bar{i}-4\bar{j}-\bar{k}$, $\bar{v}_2=3\bar{i}+\bar{j}+2\bar{k}$ vectorii directori ai dreptelor (d_1) respectiv (d_2). Înlocuind în formula (19) obţinem $d\big((d_1),(d_2)\big)=\dfrac{10\sqrt{3}}{27}$.

66. Să se determine distanţa dintre dreptele

$$(d_1)\quad \frac{x-9}{4}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z}{1}$$

$$(d_2)\quad \frac{x}{-2}=\frac{y+7}{9}=\frac{z-2}{2}.$$

Răspuns: 7.

67. Să se determine distanţa dintre dreptele

$$(d_1)\quad \begin{cases}2x-y-1=0\\ 3y-2z-1=0\end{cases}$$

şi

$$(d_2)\quad \frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}.$$

Răspuns: $\dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

CAPITOLUL VI

CONICE

§1. CONICE PE ECUAŢIA REDUSĂ

ELIPSA: *Elipsa* este locul geometric al punctelor care au suma distanţelor la două puncte fixe (numite *focare*) constantă:

$$\|MF\|+\|MF'\|=2a.$$

Ecuaţia carteziană: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-1=0,\qquad a^2-c^2=b^2.$

Ecuaţii parametrice: $\begin{cases}x=a\cos t\\ y=b\sin t\end{cases},\ t\in[0,2\pi].$

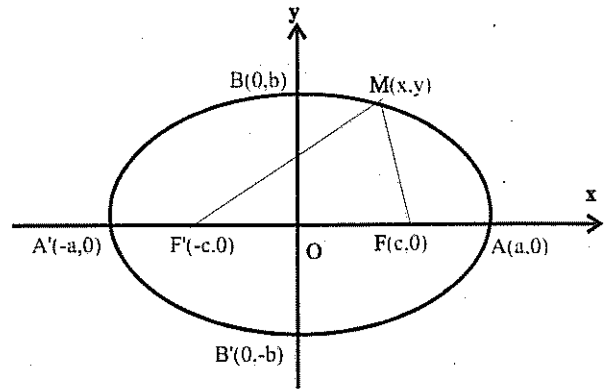


figura 1

HIPERBOLA: *Hiperbola* este locul geometric al punctelor care au modulul diferenţei distanţelor la două puncte fixe (numite *focare*) constant:

Ecuaţia carteziană: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-1=0,\ c^2-a^2=b^2.$

Ecuaţii parametrice: $\begin{cases}x=a\,\mathrm{ch}\,t\\ y=a\,\mathrm{sh}\,t\end{cases},\ t\in\mathbf{R}.$

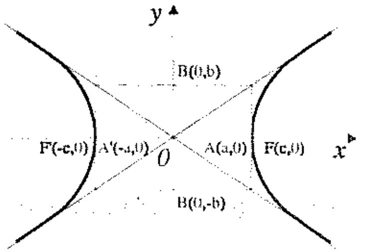


figura 2

PARABOLA: *Parabola* este locul geometric al punctelor egal depărtate de o dreaptă fixă şi de un punct fix. Dreapta fixă se numeşte *directoare*, iar punctul fix *focar*.

$$\|MN\| = \|MF\|$$

Ecuaţia carteziană: $y^2 = 2px$

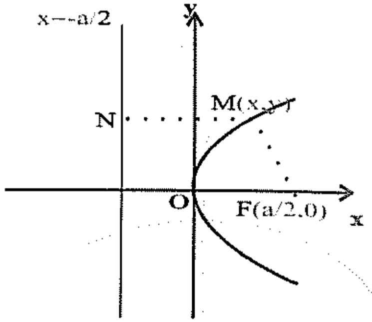


figura 3

1. Un triunghi ABC are baza fixă BC = 14 cm. Să se determine locul geometric al vârfului A, variabil, ştiind că perimetrul triunghiului este constant, egal cu 32 cm.

Răspuns: o elipsă de ecuaţie: $\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{32}-1=0$, dacă se consideră originea sistemului de coordonate la mijlocul segmentului BC, axa Ox ca fiind dreapta BC iar axa Oy mediatoarea acestui segment.

2. Să se scrie ecuaţia elipsei ce trece prin punctele $M_1(1,2)$ şi $M_2(3,-1)$ luând ca axe de coordonate axele ei.

Răspuns: $3x^2+8y^2-35=0$.

3. Să se scrie ecuaţiile tangentelor duse din A(-6,3) la elipsa:

$$\frac{x^2}{15}+\frac{y^2}{9}-1=0.$$

Răspuns: y=3; 12x +7y + 51 = 0.

4. Ce valoare trebuie să aibă m pentru ca dreapta y = 3x + m să fie tangentă la elipsa:

$$\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{9}-1=0.$$

După determinarea lui m, să se afle coordonatele punctului de tangenţă.

Răspuns: $m = \pm 3\sqrt{2}$; $M_1\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$; $M_2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$.

5. Să se scrie ecuaţia hiperbolei ale cărei axe coincid cu axele de coordonate, ştiind că trece prin punctele $M_1(-5,2)$ şi $M_2(2\sqrt{5},\sqrt{2})$.

Răspuns: $\frac{x^2}{15}-\frac{y^2}{6}-1=0$.

6. Să se scrie ecuaţia hiperbolei cunoscând ecuaţiile asimptotelor sale $x \pm 2y = 0$ şi că dreapta 5x - 6y - 8 = 0 este tangentă hiperbolei.

Răspuns: $x^2-4y^2-4=0$

7. Să se scrie ecuaţia unei hiperbole ce trece prin punctul $M(12,3\sqrt{5})$ şi are drept focare punctele $F_1(10,0$ şi $F_2(-10,0$.

Răspuns: $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}-1=0$

8. Să se calculeze parametrul parabolei $y^2=2px$ ştiind că ea este tangentă dreptei x - 2y + 5 = 0.

Răspuns: $p=\frac{5}{2}$

9. Să se afle locul geometric al proiecţiei unui focar al elipsei:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$$

pe o tangentă variabilă la elipsă (*podara* elipsei în raport cu un focar).

Răspuns: $x^2+y^2=a^2$

10. Se consideră elipsa:

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}-1=0$$

şi punctul P(4,6). Din punctul P se duc tangentele la elipsă şi fie M_1, M_2 punctele de tangenţă. Fie F un focar al elipsei. Să se arate că dreapta FP este bisectoarea unghiului M_1FM_2.

11. Să se afle locul geometric al simetricului unui focar în raport cu o tangentă variabilă la elipsă.

Răspuns: $(x+c)^2+y^2=4a^2$

§2. CONICE PE ECUAŢII GENERALE

Ecuaţia generală a unei conice este:

$$f(x,y)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0.$$

Invarianţii unei conice sunt:

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{12} & a_{22} & a_{23}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33}\end{vmatrix},\quad \delta=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{12} & a_{22}\end{vmatrix},\quad I=a_{11}+a_{22}.$$

Natura şi tipul conicelor:

$\Delta\neq 0$, conică nedegenerată;

$\Delta=0$, conică degenerată;

$\delta\neq 0$, conică cu centru : $\delta>0$, de tip elipsă; $\delta<0$, de tip hiperbolă;

$\delta=0$, conică fără centru la distanţă finită, de tip parabolă.

Reducerea la forma canonică:

1) *Conice cu centru*:

Ecuaţia canonică:

$$S_1X^2+S_2Y^2+\frac{\Delta}{\delta}=0,$$

unde S_1 şi S_2 sunt soluţiile ecuaţiei :

$$S^2-IS+\delta=0$$

$$(S_1-S_2 \text{ are semnul lui } a_{12})$$

Centrul conicei: $C(x_0,y_0)$, cu x_0 şi y_0 soluţii ale sistemului:

$$\begin{cases}\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x}=0\\ \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y}=0\end{cases}\quad \text{sau}$$

$$\begin{cases}a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_{13}=0\\ a_{12}x_0+a_{22}y_0+a_{23}=0\end{cases}$$

Unghiul de rotaţie:

$$tg2\alpha=\frac{2a_{12}}{a_{11}-a_{22}},\alpha\in[0,\frac{\pi}{2}).$$

2. *Conice fără centru*:

Ecuaţia canonică:

$$Y^2\pm 2PX=0,\ \text{unde } P=\sqrt{-\frac{\Delta}{I^3}}.$$

Axa parabolei: $a_{11}\frac{\partial f}{\partial x}+a_{12}\frac{\partial f}{\partial y}=0$, dacă $a_{11}\neq 0$, sau

$$a_{12}\frac{\partial f}{\partial x}+a_{22}\frac{\partial f}{\partial y}=0,\ \text{dacă } a_{11}=0.$$

Vârful parabolei: $V(x_v,y_v)$ cu x_v şi y_v soluţii ale sistemului:

$$\begin{cases}f(x,y)=0\\ a_{11}\frac{\partial f}{\partial x}+a_{12}\frac{\partial f}{\partial y}=0\end{cases},\ \text{dacă } a_{11}\neq 0,$$

sau

$$\begin{cases}f(x,y)=0\\ a_{11}\frac{\partial f}{\partial x}+a_{12}\frac{\partial f}{\partial y}=0\end{cases},\ \text{dacă } a_{11}=0.$$

1. Fie conica:

$$25x^2-14xy+25y^2+64x-64y-224=0$$

a) Să se precizeze natura conicei şi să se reducă la forma canonică;

b) Să se scrie relaţiile de transformare ale coordonatelor;

c) Să se scrie ecuaţiile axelor de simetrie ale conicei şi să se reprezinte grafic.

Soluţie.

$$\Delta=\begin{vmatrix}25 & -7 & 32\\ -7 & 25 & -32\\ 32 & -32 & -224\end{vmatrix}=-288\cdot 576=-165888,$$

$$\delta=\begin{vmatrix}25 & -7\\ -7 & 25\end{vmatrix}=625-49=576,\quad I=25+25=50.$$

Deoarece $\Delta\neq 0$, conica este nedegenerată. Cum $\delta\neq 0$, conica este cu centru şi de tip elipsă.

Ecuaţia în “S”:

$$S^2-IS+\delta=0,\ \text{deci } S^2-50S+576=0,\ \text{de unde } S_1=18; S_2=32.$$

Ecuaţia redusă: $S_1X^2+S_2Y^2+\frac{\Delta}{\delta}=0$ devine $8X^2+32Y^2-288=0$ sau

$$\frac{X^2}{16}+\frac{Y^2}{9}= .$$

Coordonatele centrului: $\begin{cases}25x_0-7y_0=-32\\ -7x_0+25y_0=32\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_0=-1\\ y_0=1\end{cases}.$

Unghiul de rotaţie: $tg2\alpha=\frac{2a_{12}}{a_{11}-a_{22}}=\frac{-14}{25-25}\Rightarrow \alpha=\frac{\pi}{4}.$

Ecuaţiile axelor: $\begin{cases}x-y+2=0\\ x+y=0\end{cases}$

Relaţiile de transformare: $\begin{cases}x=-1+\frac{1}{\sqrt{2}}X-\frac{1}{\sqrt{2}}Y\\ y=1+\frac{1}{\sqrt{2}}X+\frac{1}{\sqrt{2}}Y\end{cases}$

Reprezentare grafică:

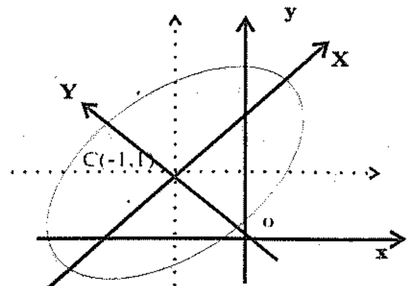


figura 4

2. Să se reducă la forma canonică şi să se reprezinte grafic conicele:

a) $5x^2+8xy+5y^2-18x-18y+9=0$;

Răspuns: $\frac{X^2}{1}+\frac{Y^2}{9}-1=0$, $C(1,1)$, $\alpha=\frac{\pi}{4}$.

b) $4x^2+9y^2-24x+18y+9=0$;

Răspuns: $\frac{X^2}{9}+\frac{Y^2}{4}-1=0$, $C(3,-1)$, $\alpha=0$.

c) $5x^2+6xy+5y^2-16x-16y-16=0$;

Răspuns: $\frac{X^2}{4}+\frac{Y^2}{16}-1=0$, $C(1,1)$, $\alpha=\frac{\pi}{4}$.

d) $x^2-xy+y^2-5x+y-2=0$;

Răspuns: $\frac{X^2}{18}+\frac{Y^2}{6}-1=0$, $C(3,1)$, $\alpha=\frac{\pi}{4}$.

e) $3x^2-2xy+3y^2-4x-4y-36=0$;

Răspuns: $\frac{X^2}{20}+\frac{Y^2}{10}-1=0$, $C(1,1)$, $\alpha=\frac{\pi}{4}$.

f) $5x^2-8xy+5y^2-12x+6y=0$;

Răspuns: $\frac{X^2}{9}+\frac{Y^2}{1}-1=0$, $C(2,1)$, $\alpha=\frac{\pi}{4}$.

g) $6x^2-4xy+9y^2-4x-32y-6=0$;

Răspuns: $\frac{X^2}{8}+\frac{Y^2}{4}-1=0$, $C(1,2)$, $\alpha=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{4}{3}$.

h) $2x^2-6xy+10y^2-8x+12y+2=0$;

Răspuns: $\frac{X^2}{6}+\frac{Y^2}{\frac{6}{11}}-1=0$, $C(2,0)$, $\alpha=\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$.

i) $9x^2+2\sqrt{3}xy+7y^2-30=0$;

Răspuns: $\frac{X^2}{3}+\frac{Y^2}{5}-1=0$, $C(0,0)$, $\alpha=\frac{\pi}{6}$.

j) $5x^2-6xy+5y^2-6\sqrt{2}x+10\sqrt{2}y+8=0$;

Răspuns: $\frac{X^2}{1}+\frac{Y^2}{\frac{1}{4}}-1=0$, $C(0,-\sqrt{2})$, $\alpha=\frac{\pi}{4}$.

3. Fie conica:

$$3x^2+10xy+3y^2-2x-14y-13=0$$

a) Să se precizeze natura conicei şi să se reducă la forma canonică;

b) Să se scrie relaţiile de transformare ale axelor de coordonate;

c) Să se scrie ecuaţiile axelor şi să se reprezinte grafic.

Soluţie.

$$\Delta=\begin{vmatrix}3 & 5 & -1\\ 5 & 3 & -7\\ -1 & -7 & -13\end{vmatrix}=128,$$

$$\delta=\begin{vmatrix}3 & 5\\ 5 & 3\end{vmatrix}=-16, \qquad I=3+3=6.$$

Deoarece $\Delta\neq 0$, conica este nedegenerată. Cum $\delta\neq 0$ ea este cu centru şi de tip hiperbolic ($\delta<0$).

Ecuaţia în "S":

$S^2-IS+\delta=0$, $S^2-6S-16=0$, de unde $S_1=8$; $S_2=-2$ ($S_1-S_2>0$).

Ecuaţia redusă: $S_1X^2+S_2Y^2+\frac{\Delta}{\delta}=0$ devine $8X^2-2Y^2-8=0$ sau

$$\frac{X^2}{1}-\frac{Y^2}{4}-1=0.$$

Coordonatele centrului $\begin{cases}3x_0+5y_0-1=0\\ 5x_0+3y_0-7=0\end{cases} \Rightarrow (C)\begin{cases}x_0=2\\ y_0=-\end{cases}$.

Unghiul de rotaţie: $tg2\alpha=\frac{2a_{12}}{a_{11}-a_{22}}=\frac{10}{3-3} \Rightarrow \alpha=\frac{\pi}{4}$.

Ecuaţiile axelor: $\begin{cases}x-y-3=0\\ x+y-1=0\end{cases}$

Relaţiile de transformare: $\begin{cases}x=2+\frac{1}{\sqrt{2}}X+\frac{1}{\sqrt{2}}Y\\ y=-1+\frac{1}{\sqrt{2}}X-\frac{1}{\sqrt{2}}Y\end{cases}$

Reprezentare grafică:

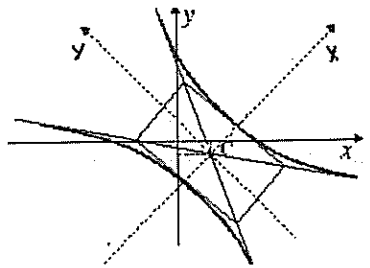


figura 5

4. Să se reducă la forma canonică şi să se reprezinte grafic conicele:

a) $x^2-6xy+y^2+6x-6y+4=0$;

Răspuns: $-\frac{X^2}{\frac{1}{4}}+\frac{Y^2}{\frac{1}{8}}-1=0$, $C(-\frac{3}{4},\frac{3}{4})$, $\alpha=\frac{\pi}{4}$.

b) $3xy+6x-y-8=0$;

Răspuns: $\frac{X^2}{4}-\frac{Y^2}{4}-1=0$, $C(\frac{1}{3},-2)$, $\alpha=\frac{\pi}{4}$.

c) $x^2-8xy+7y^2+6x-6y+9=0$;

Răspuns: $\frac{X^2}{9}-\frac{Y^2}{1}-1=0$, $C(1,1)$, $\alpha=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$.

d) $6xy+8y^2-12x-26y+11=0$;

Răspuns: $\frac{X^2}{1}-\frac{Y^2}{9}-1=0$, $C(-1,2)$, $\alpha=\operatorname{arctg}3$.

e) $5x^2+12xy-22x-12y-19=0$;

Răspuns: $\frac{X^2}{4}-\frac{Y^2}{9}-1=0$, $C(1,1)$, $\alpha=\operatorname{arctg}\frac{2}{3}$.

f) $x^2-4xy+y^2+3x-3y+2=0$;

Răspuns: $\frac{X^2}{3}-\frac{Y^2}{1}-\frac{1}{6}=0$, $C(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, $\alpha=\frac{\pi}{4}$.

g) $x^2-9y^2+4x-54y-78=0$;

Răspuns: $X^2-\frac{Y^2}{\frac{1}{9}}-1=0$, $C(-2,-3)$, $\alpha=0$.

5. Fie conica:

$$9x^2-24xy+16y^2-20x+110y-50=0.$$

a) Să se precizeze natura conicei şi să se reducă la forma canonică;
b) Să se scrie formulele de transformare ale axelor de coordonate;
c) Să se scrie ecuaţiile noilor axe şi să se reprezinte grafic.

Soluţie.

$$\Delta=\begin{vmatrix}9&-12&-10\\-12&16&55\\-10&55&-50\end{vmatrix}=-15.625,$$

$$\delta=\begin{vmatrix}9&-12\\-12&16\end{vmatrix}=0,\quad I=9+16=25.$$

Deoarece $\Delta\neq0$ iar $\delta=0$ conica este nedegenerată, de tip parabolă. Ecuaţia canonică este:

$Y^2\pm2\sqrt{-\frac{\Delta}{I^3}}X=0$, $Y^2\pm2\sqrt{\frac{25^3}{25^3}}X=0$ sau $Y^2\pm2X=0$. Intersectând conica cu axa Ox deducem că $Y^2=-2X$. Apoi $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{a_{11}}{a_{12}}$, $\alpha\in[0,\pi)$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{4}$ şi $V\left(\frac{18}{5},\frac{1}{5}\right)$.

Relaţiile de transformare: $\begin{cases}x=\frac{4}{5}X-\frac{3}{5}Y+\frac{18}{5}\\ y=\frac{3}{5}X+\frac{4}{5}Y+\frac{1}{5}\end{cases}$.

Ecuaţiile noilor axe: $\begin{cases}3x-4y-10=0\\4x+3y-15=0\end{cases}$.

Reprezentare grafică:

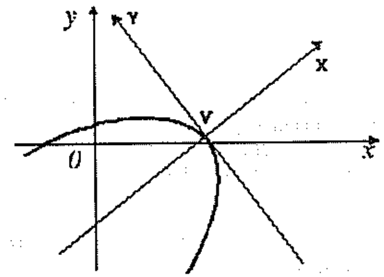


figura 6

6. Să se reducă la forma canonică şi să se reprezinte grafic conicele:

a) $9x^2+24xy+16y^2+22x+46y+9=0$;

Răspuns: $Y^2=-\frac{2}{5}X$, $V(-\frac{47}{25},\frac{4}{25})$, axa $3x+4y+5=0$, $\alpha=\pi-\operatorname{arctg}\frac{3}{4}$.

b) $x^2-2xy+y^2-10x-6y+25=0$;

Răspuns: $Y^2=4\sqrt{2}X$, $V(2,1)$, axa $x-y-1=0, \alpha=\frac{\pi}{4}$.

c) $16x^2+24xy+9y^2-30x+40y=0$;

Răspuns: $Y^2=-2X$, $V(0,0)$, axa $4x+3y=0, \alpha=\pi-\operatorname{arctg}\frac{4}{3}$.

d) $2y^2-3x+12y-3=0$;

Răspuns: $Y^2=\frac{3}{2}X$, $V(-7,-3)$, axa $y+3=0, \alpha=0$.

e) $4x^2-4xy+y^2-2x-14y+7=0$;

Răspuns: $Y^2=\frac{6\sqrt{5}}{5}X$, $V(-\frac{1}{5},\frac{3}{5})$, axa $2x-y+1=0, \alpha=\operatorname{arctg}2$.

f) $x^2-2xy+y^2+8x=0$;

Răspuns: $Y^2=-2\sqrt{2}X$, $V(-\frac{1}{2},\frac{3}{2})$, axa $x-y+2=0, \alpha=\frac{\pi}{4}$.

g) $x^2-2xy+y^2+3x+y-4=0$;

Răspuns: $Y^2=-\sqrt{2}X$, $V(\frac{13}{16},\frac{21}{16})$, axa $2x-2y+1=0, \alpha=\frac{\pi}{4}$.

h) $x^2-2xy+y^2-2x-4y+4=0$;

Răspuns: $Y^2=\frac{3}{2}\sqrt{2}X$, $V(\frac{3}{8},\frac{7}{8})$, axa $2x-2y+1=0, \alpha=\frac{\pi}{4}$.

7. Conica: $2x^2+xy-6y^2-5x+11y-3=0$ este o hiperbolă degenerată în două drepte. Să se afle ecuațiile acestor drepte.

Răspuns: $\begin{cases} x+2y-3=0 \\ 2x-3y+1=0 \end{cases}$

8. Să se arate că ecuația: $5x^2+2xy+2y^2-6y+6=0$ este ecuația unei elipse ~~degenerată în două drepte~~ imaginare.

Răspuns: $\frac{7+\sqrt{13}}{2}X^2+\frac{7-\sqrt{13}}{2}Y^2+1=0$.

9. Se dă conica: $7x^2+6xy-y^2+28x+12y+28=0$. Să se precizeze natura conicei și să se reprezinte grafic.

Răspuns: Hiperbola degenerată $\begin{cases} x+y+2=0 \\ 7x-y+14=0 \end{cases}$

10. Să se arate că ecuațiile:

a) $x^2-2xy-2y^2-4x-6y-\frac{13}{3}-=0$;

b) $6x^2+10xy-4y^2-7x+7y-3-=0$;

c) $y^2-xy-5x+7y+10=0$,

reprezintă câte două drepte și să se determine ecuațiile lor.

Răspuns: a) $\begin{cases} \sqrt{3}x+y(3-\sqrt{3})+5-2\sqrt{3}=0 \\ \sqrt{3}x-y(3+\sqrt{3})-5-2\sqrt{3}=0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 3x-y+1=0 \\ 2x+4y-3=0 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x-y-2=0 \\ y+5=0 \end{cases}$.

11. Să se precizeze natura conicelor:

a) $(x+3y)^2+2x+6y-3=0$;

b) $6(x^2+y^2)+13xy-17x-13y+5=0$;

c) $5x^2-4xy+y^2=0$.

Răspuns: a) parabolă degenerată în dreptele: $x+3y+3=0$ și $x+3y-1=0$;
b) hiperbolă degenerată în dreptele: $2x+3y-5=0$ și $3x+2y-1=0$;
c) elipsă degenerată în două drepte imaginare.

12. Conica: $x^2+4xy+4y^2+x+2y-2=0$ este o parabolă degenerată. Să se afle ecuațiile dreptei din care se compune conica.

Răspuns: $\begin{cases} x+2y-1=0 \\ x+2y+2=0 \end{cases}$

13. Să se arate ca ecuația: $6x^2-40xy+25y^2-20x+25y-6=0$ reprezintă două drepte paralele. Să se scrie ecuațiile fiecareia din cele două drepte.

Răspuns: $\begin{cases} 4x-5y-6=0 \\ 4x-5y+1=0 \end{cases}$

14. Să se determine K astfel încât conica: $2x^2+5xy-3y^2-23x+8y+K=0$ să reprezinte două drepte și să se găsească ecuațiile lor.

Răspuns: $K=11$, $\begin{cases} 2x-y-1=0 \\ x+3y-11=0 \end{cases}$

15. Să se discute natura conicelor: $2x^2+2mxy+3y^2-8x-9y+6=0$, m fiind un parametru care variază de la $-\infty$ la $+\infty$. Dacă se obțin conice cu centru, să se afle locul geometric al centrelor lor.

Răspuns: Locul geometric este hiperbola $4x^2-6y^2-8x+3y=0$.

16. Să se discute natura conicelor:

$$(\alpha-1)x^2+2\beta xy-(\alpha+1)y^2+2\alpha x+2\beta y-(\alpha+1)=0$$

interpretând parametrii α, β drept coordonate in plan.

Răspuns: $\Delta=2(\alpha+1)\left(\alpha^2+\beta^2-\frac{1}{2}\right)$, $\delta=-(\alpha^2+\beta^2-1)$, I=-2.

Discuție: a) $\alpha^2+\beta^2=1$, $\delta=0$, parabolă; $\alpha=-1$, $\Delta=0$, parabolă degenerată;
b) $\alpha^2+\beta^2-1>0$, $\delta<0$, hiperbolă; $\alpha=-1$, hiperbolă degenerată;
c) $\alpha^2+\beta^2-1<0, \delta>0$, elipsă; $\alpha=-1$ sau $\alpha^2+\beta^2=1/2$, elipsă degenerată.

17. Să se afle polul dreptei 2x-3y-7=0 față de conica de ecuație:

$$2x^2 - 2xy + y^2 - 6x + 2y - 3 = 0.$$

Răspuns: $\left(\frac{2}{3}, -\frac{13}{3}\right)$.

18. Să se afle polara punctului A(3,-2) față de conica de ecuație:

$$x^2 - 3xy + 2y^2 - x + 2y - 3 = 0$$

Răspuns: 11x-15y-13=0.

19. Să se scrie ecuația polarei punctului M(1,2) în raport cu conica:

$$x^2 + 2xy - y^2 + 3x - 5y = 0$$

și apoi să se afle polul dreptei x+y-1=0 în raport cu aceeași conică.

Răspuns: $9x - 7y - 7 = 0,\ A\left(-\frac{9}{5}, -2\right)$.

20. Să se scrie ecuația tangentei la conica:

$$x^2 + 3xy - y^2 - 3x - 2y + 4 = 0$$

în punctul M(1,2).

Răspuns: 5x-3y+1=0.

21. Să se scrie ecuațiile tangentelor la curba:

$$x^2 - 2y^2 - 5x + 4y + 6 = 0$$

în punctele ei de intersecție cu axele de coordonate.

Răspuns: 5x+8y-24=0, în A(0,3),
5x-8y-8=0, în B(0,-1),
x-4y-2=0 în C(2,0),
x+4y-3=0 în D(3,0).

22. Să se scrie ecuațiile tangentelor la conica:

$$x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y - 3 = 0$$

paralele cu dreapta 3x+3y-5=0.

Răspuns: $3x + 3y + 13 = 0,\ x + y - 1 = 0.$

23. Să se determine parametrul real m astfel încât dreapta:

2x-y+m=0

să fie tangentă la conica:

$$x^2 - 4xy + y^2 - 2x + 4y - 3 = 0$$

Răspuns: $\begin{cases} m_1 = 0, & M_1(1,2) \\ m_2 = -4, & M_2 = (1,-2) \end{cases}$.

24. Să se scrie ecuațiile tangentelor duse din punctul $M_0(3,4)$ la conica:

$$2x^2 - 4xy + y^2 - 2x + 6y - 3 = 0$$

Răspuns: 7x-2y-13=0,
x-3=0.

25. Să se stabilească ecuația tangentelor paralele cu a doua bisectoare a axelor de coordonate la conica de ecuație:

$$x^2 + 2xy - 2x - y - 1 = 0.$$

Răspuns: $y = -x + \frac{2 \pm \sqrt{7}}{2}$.

26. Să se scrie asimptotele conicei:

$$x^2 - 3xy + 2y^2 - 4x + 5y - 3 = 0.$$

Răspuns: x-y-1=0 și x-2y-3=0.

27. Să se scrie ecuația axelor conicei:

$$5x^2 - 20xy - 10y^2 + 30x + 16 = 0$$

Răspuns: 2x-y+3=0,
x+2y-1=0.

28. Se dă conica:

$$(x - 2y - 1)^2 + (2x - y + 1)^2 = 9.$$

Să se afle diametrele conjugate a căror coeficienți unghiulari satisfac relația: $m_1 \cdot m_2 = 1$.

Răspuns: x-2y-1=0,
2x-y+1=0.

29. Se dă conica:

$$x^2 - 3xy - 4y^2 + 6x - y + 3 = 0.$$

a) Să se scrie ecuația diametrului care trece prin punctul M(1,0);
b) Să se scrie ecuația diametrului care este paralel cu dreapta:
2x+2y+1=0.

Răspuns: a) 4x+19y-4=0,
b) 5x+5y+7=0.

30. Prin punctul A(1,-2) este dus un diametru al conicei:

$$3x^2 - 2xy + 3y^2 + 4x + 4y - 4 = 0.$$

Să se scrie ecuația acestui diametru, precum și a diametrului său conjugat.

Răspuns: x+2y+3=0, 7x-5y+2=0.

31. Să se determine diametri conjugați ai conicei:

$$3x^2 - 6xy + 5y^2 - 4x - 6y + 10 = 0$$

care fac între ei un unghi de 45^0.

Răspuns: 3x-3y-2=0 și 2y-5=0 sau
6x-12y+11=0 și 3x-y-7=0.

32. Să se scrie ecuația conicei ce trece prin origine și care are perechile de diametri conjugați:

x-3y-2=0, 5x-5y-4=0 și respectiv
5y+3=0, 2x-y-1=0.

Răspuns: $x^2 - xy - y^2 - x - y = 0.$

33. Să se găsească mijlocul coardei tăiate de conica:

$$2x^2 + 4xy + 3y^2 - 3x - 3y = 0$$

pe dreapta:

$$x+3y-12=0.$$

Răspuns: A(-3,5).

34. Să se determine focarele şi directoarele conicei:

$$3x^2-4xy-2x+4y-5=0.$$

Răspuns: $F_1(-1,2)$, $F_2(3,0)$, (D_1) $2x-y=0$, (D_2) $2x-y-2=0$.

35. Să se scrie ecuaţia generală a conicelor care trec prin punctele A(-4,0), B(0,2), C(3,0), D(0,6) şi să se arate că toate aceste conice sunt hiperbole echilatere. Să se afle locul geometric al centrelor lor.

Răspuns: $(x-2y+4)(2x+y-6)+mxy=0$. Locul geometric: $2(x^2+y^2)+x-8y=0$.

36. Se consideră conica:

$$3x^2-4xy-2x+4y+7=0$$

a) Să se stabilească tipul conicei, să se reducă la forma canonică şi să se reprezinte grafic;

b) Să se scrie ecuaţiile asimptotelor;

c) Să se scrie ecuaţiile axelor;

d) Să se scrie ecuaţia diametrului conjugat dreptei:

$$2x-y+8=0$$

în raport cu conica, dată.

Răspuns:

a) Hiperbola $\frac{X^2}{8}-\frac{Y^2}{2}-1=0$, C(1,1); b) $3x-4y+1=0$, $x-1=0$;

c) $x+2y-3=0$, $2x-y-1=0$; d) $x+2y-3=0$.

37. Se dă conica:

$$6x^2-xy-y^2-10x+5y+5=0$$

a) Să se stabilească natura conicei;

b) Să se scrie ecuaţia diametrului conjugat primei bisectoare şi să se arate că locul geometric al punctelor M ale căror polare în raport cu conica dată trec prin origine este o dreaptă (d) paralelă cu o asimptotă a conicei;

c) Prin origine, se duce o paralelă la a doua asimptotă, care întâlneşte dreapta (d) în punctul P şi curba în N. Să se arate că N este mijlocul lui OP.

Răspuns: a) Hiperbolă; b) $11x-3y-5=0$ (diametrul conjugat), $2x_0-y_0-2=0$ (locul geometric); c) $P\left(\frac{2}{5},-\frac{6}{5}\right)$, $N\left(\frac{1}{5},-\frac{3}{5}\right)$.

38. Se dă familia de conice:

$$3x^2-2mxy+3y^2+4x+4y+4=0.$$

a) Să se afle locul geometric al centrelor conicelor din familie şi să se reprezinte grafic;

b) Să se afle conicele din familie, degenerate;

c) Să se aducă la forma canonică şi să se reprezinte grafic parabola din familie.

Răspuns: a) $(x-y)(3x+3y+2)=0$, două drepte concurente;

b) $m=-3$ două drepte paralele, $m=1$ două drepte imaginare;

c) $m=3$ parabolă, $Y^2=-\frac{4}{3\sqrt{2}}X$, $V\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$, $\alpha=\frac{\pi}{4}$, cu axa $x-y=0$.

39. Fie o familie de conice:

$$x^2+2mxy+y^2-2x-4y+4=0$$

unde $m\in\mathbf{R}$.

a) Să se discute natura conicelor după valorile parametrului m;

b) In cazul conicelor cu centru să se determine locul geometric al centrelor familiei de conice.

Răspuns: a) $\Delta=-(2m-1)^2, \delta=1-m^2$. Dacă $m\neq\frac{1}{2}$, conice nedegenerate şi anume : $m\in(-1,1)$, elipse; $m\in(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$, hiperbole; $m=\pm1$, parabole. Dacă $m=\frac{1}{2}$ se obţin două drepte imaginare.

b) Locul geometric este hiperbola $x^2-y^2-2x+2y=0$.

40. Se consideră fascicolul de conice:

$$3x^2-2mxy+3y^2+4x+4y+4=0,$$

m fiind un parametru. Se cere:

a) Să se determine natura conicelor;

b) Să se reducă la forma canonică şi să se reprezinte conica din familie pentru m=5;

c) In acest caz să se stabilească:

- ecuaţiile axelor;
- ecuaţiile asimptotelor;
- ecuaţia polarei punctului A(4,2) în raport cu conica;
- ecuaţia diametrului conjugat primei bisectoare a axelor de coordonate.

Răspuns: a) $\Delta=-4(m+3)(m-1), \delta=9-m^2$; b) $\frac{X^2}{4}-\frac{Y^2}{1}-1=0$, C(1,1);

c) axe: $x+y-2=0, x-y=0$; asimptote: $3x-y-2=0$, $x-3y+2=0$;

polara $x-3y+4=0$; diametru conjugat: $x+y-2=0$.

CAPITOLUL VII

SUPRAFEŢE CONICE, CILINDRICE ŞI DE ROTAŢIE

§ 1. GENERAREA SUPRAFEŢELOR CONICE

Suprafaţa conică este *suprafaţa riglată* generată de o dreaptă variabilă (g), numită *generatoare*, ce trece printr-un punct fix V(a,b,c), numit *vârful conului*, şi se deplasează sprijinindu-se pe o curbă fixă (Γ), numită *curba directoare*.

Fie

$$(\Gamma)\begin{cases}F(x,y,z)=0\\ G(x,y,z)=0\end{cases}$$

curba directoare. O dreaptă oarecare care trece prin V(a,b,c) are ecuaţiile:

$$(g)\quad \frac{x-a}{l}=\frac{y-b}{m}=\frac{z-c}{n},\ \text{cu } l^2+m^2+n^2\neq 0.$$

Dacă presupunem că $n\neq 0$, împărţim numitorii lui (g) la n şi notăm $\frac{l}{n}=\lambda$, $\frac{m}{n}=\mu$, ecuaţiile generatoarei devin:

$$\frac{x-a}{\lambda}=\frac{y-b}{\mu}=\frac{z-c}{1}.$$

Condiţia ca generatoarea să se sprijine pe curba directoare revine la asigurarea compatibilităţii sistemului:

$$\begin{cases}\frac{x-a}{\lambda}=\frac{y-b}{\mu}=z-c\\ F(x,y,z)=0\\ G(x,y,z)=0\end{cases}$$

Se elimină x,y,z din 3 dintre ecuaţiile sistemului, în funcţie de λ şi μ, şi se înlocuiesc în cea de-a patra ecuaţie obţinându-se *condiţia de compatibilitate*: $\Phi(\lambda,\mu)=0$. Înlocuind în condiţia de compatibilitate λ şi μ cu valorile date de ecuaţiile lui (g) se obţine ecuaţia $\Phi(\frac{x-a}{z-c},\frac{y-b}{z-c})=0$, care reprezintă ecuaţia conului generat.

1. Să se scrie ecuaţia suprafeţei conice cu vârful în V(0,–a,0) şi curba directoare $x^2+y^2+z^2=a^2$, $y+z=a$, $a>0$.

Soluţie: Generatoarea conului este o dreaptă ce trece prin punctul V şi se sprijină pe curba directoare dată. O dreaptă de direcţie arbitrară ce trece prin V este dată de

ecuaţiile: $x=\lambda z$, $y+a=\mu z$. Condiţia ca această dreaptă să se sprijine pe curba directoare (adică dreapta şi curba directoare să aibă un punct comun), este ca sistemul:

$$\begin{cases}x=\lambda z\\ y+a=\mu z\\ x^2+y^2+z^2=a^2\\ y+z=a\end{cases}$$

să fie compatibil. Condiţia de compatibilitate se obţine eliminând pe x,y,z din acest sistem. Deoarece $y=\mu z-a$, din ultima ecuaţie a sistemului se obţine: $z=\frac{2a}{\mu+1}$.

Rezultă $x=\frac{2a\lambda}{\mu+1}$ şi $y=\frac{a\mu-a}{\mu+1}$. Cu aceste valori ale lui x, y, z, a treia ecuaţie a sistemului devine:

$$\frac{4a^2\lambda^2}{(\mu+1)^2}+\frac{(a\mu-a)^2}{(\mu+1)^2}+\frac{4a^2}{(\mu+1)^2}=a^2,$$

sau $\lambda^2-\mu+1=0$ (condiţia de compatibilitate). Deci dacă λ şi μ verifică această relaţie, atunci dreapta dată de ecuaţiile $x=\lambda z$, $y+a=\mu z$ generează prin deplasarea ei în jurul punctului V, sprijinindu-se pe curba directoare, un con. Ecuaţia conului se va obţine eliminând pe λ şi μ între ecuaţiile:

$$\begin{cases}x=\lambda z\\ y+a=\mu z\\ \lambda^2-\mu+1=0\end{cases}$$

deci este: $\frac{x^2}{z^2}-\frac{y+a}{z}+1=0$ sau $x^2+z^2-(y+a)z=0$.

2. Să se scrie ecuaţia conului cu vârful V(1,1,1) şi curba directoare $x^2+y^2-4=0$, $z=0$.

Răspuns: $x^2+y^2-2z^2-2xz-2yz+8z-4=0$.

3. Să se scrie ecuaţia conului cu vârful în V(0,0,h), $h\neq 0$ şi curba directoare *lemniscata*: $(x^2+y^2)^2-a^2(x^2-y^2)=0$, $z=0$.

Răspuns: $h^2(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)(z-h)^2$.

4. Să se scrie ecuaţia conului cu vârful V(0,–a,0) şi curba directoare $x^2=2py$, $z=h$.

Răspuns: $h^2x^2=2pz(h(y+a)-az)$.

5. Să se scrie ecuaţia conului cu vârful V(0,0,0) şi curba directoare $y^2=ax$, $z=a$, $a\neq 0$.

Răspuns: $xz=y^2$.

6. Să se scrie ecuaţia conului cu vârful V(3,–1,–2) şi curba directoare $x^2+y^2-z^2=1$, $x-y+z=0$.

Răspuns: $3x^2-5y^2+7z^2-6xy+10xz-2yz-4x+4y-4z+4=0$.

7. Să se scrie ecuația conului cu vârful V(0,0,0) și curba directoare *elicea* $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=kt$, $t\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, $k>0$.

Răspuns: $az-k\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{arctg}\frac{y}{x}=0$.

8. Să se scrie ecuația conului cu vârful V(−3,0,0) și curba directoare $3x^2+6y^2-z=0$, $x+y+z=1$.

Răspuns: $3(x-3y-3z+3)^2+96y^2-4z(x+y+z+3)=0$.

9. Să se scrie ecuația conului cu vârful V(a,b,c) și curba directoare $9x^2+16y^2-1=0$, $z=0$.

Răspuns: $9(az-cx)^2+16(bz-cy)^2-(z-c)^2=0$.

10. Să se scrie ecuația conului cu vârful V(a,b,c), $c\neq 0$ și curba directoare $x^2+y^2-R^2=0$, $z=0$.

Răspuns: $(az-cx)^2+(bz-cy)^2-R^2(z-c)^2=0$.

11. Să se scrie ecuația conului cu vârful V(0,0,c), $c\neq 0$ și curba directoare $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $z=0$.

Răspuns: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{(z-c)^2}{c^2}=0$.

12. Să se scrie ecuația conului cu vârful V(0,0,8) și curba directoare $y^2=4x$, $z=0$.

Răspuns: $2y^2+xz-8x=0$.

13. Să se scrie ecuația conului cu vârful V(0,0,0) și curba directoare $x^2+y^2+(z-5)^2=9$, $z=4$.

Răspuns: $2x^2+2y^2-z^2=0$.

14. Să se scrie ecuația conului cu vârful V(0,0,0) și curba directoare $x^2=y$, $x+y+z-1=0$.

Răspuns: $x^2-y^2=y(x+z)$.

15. Să se scrie ecuația conului cu vârful V(0,0,0) și curba directoare $x^2-2z+1=0$, $y-z+1=0$.

Răspuns: $x^2+y^2-z^2=0$.

16. Să se scrie ecuația conului cu vârful V(0,0,0) și curba directoare $y^2-x=0$, $4x+3y+2z-1=0$.

Răspuns: $y^2-4x^2-3xy-2xz=0$.

17. Să se scrie ecuația conului cu vârful V(0,0,2) și curba directoare cercul $x^2+y^2-2x-6y-1=0$, $z=0$. Să se arate că suprafața conică găsită este intersectată de celelalte două plane de coordonate după hiperbole.

Răspuns: $4x^2+4y^2-z^2+4xz+12yz-8x-24y+4z-4=0$; Hiperbolele au ecuațiile:

$4y^2-z^2+12yz-24y+4z-4=0$, $x=0$; $4x^2-z^2+4xz-8x+4z-4=0$, $y=0$.

18. Să se scrie ecuația conului cu vârful V(a,b,c), $c\neq 0$ și curba directoare $y^2-2px=0$, $z=0$.

Răspuns: $(bz-cy)^2-2p(az-cx)(z-c)=0$.

19. Să se scrie ecuația conului cu vârful V(−1,0,0) circumscris paraboloidului eliptic $2y^2+z^2=4x$.

Soluție: Generatoarea conului este o dreaptă ce trece prin punctul V și este tangentă paraboloidului. O dreaptă de direcție arbitrară ce trece prin V este dată de ecuațiile $x+1=\lambda z$, $y=\mu z$. Condiția ca această dreaptă să fie tangentă paraboloidului este ca sistemul:

$$\begin{cases} x+1=\lambda z \\ y=\mu z \\ 2y^2+z^2=4x \end{cases}$$

să aibă o singură soluție. Deoarece $x=\lambda z-1$ și $y=\mu z$., ultima ecuație a sistemului devine $(2\mu^2+1)z^2-4\lambda z+4=0$. Această ecuație trebuie să aibă o singură soluție, deci trebuie ca $\Delta=4\lambda^2-4(2\mu^2+1)=0$ sau $\lambda^2-2\mu^2-1=0$.

Dacă λ și μ verifică această relație, atunci sistemul considerat are soluție unică. Ecuația conului se obține eliminând pe λ și μ între ecuațiile:

$$\begin{cases} x+1=\lambda z \\ y=\mu z \\ \lambda^2-2\mu^2-1=0 \end{cases},$$

deci este: $\frac{(x+1)^2}{z^2}-2\left(\frac{y}{z}\right)^2-1=0$ sau $(x+1)^2-2y^2-z^2=0$.

20. Să se scrie ecuația conului cu vârful V(0,0,h) circumscris paraboloidului eliptic $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$.

Răspuns: $(z-h)^2+2h\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)=0$.

21. Să se scrie ecuația conului cu vârful V(0,a,0) circumscris sferei $x^2+y^2+(z-c)^2=R^2$.

Răspuns: $((y-a)-cz)^2-(x^2+z^2+(y-a)^2)(a^2+c^2-R^2)=0$.

22. Să se scrie ecuația conului cu vârful V(0,0,0) și tangent sferei $x^2+y^2+z^2-2ax-2ay-2az+a^2=0$.

Răspuns: $xy+xz+yz=0$.

§ 2. GENERAREA SUPRAFEȚELOR CILINDRICE

Suprafața cilindrică este *suprafața riglată* generată de o dreaptă variabilă (g), numită *generatoare*, ce se deplasează rămânând paralelă cu o direcție fixă $\vec{d} = (l,m,n)$ și se sprijină pe o curbă fixă (Γ), numită *curba directoare*.

Fie $(\Gamma)\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$ curba directoare. O dreaptă care trece prin O(0,0,0) și este paralelă cu $\vec{d} = (l,m,n)$ are ecuațiile: (d) $\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n}$, sau $\begin{cases}nx - lz = 0\\ny - mz = 0\end{cases}$.

Generatoarea va fi o dreaptă paralelă cu (d) ale cărei ecuații sunt: (g) $\begin{cases}nx - lz = \lambda\\ny - mz = \mu\end{cases}$.

Condiția ca generatoarea să se sprijine pe curba directoare revine la asigurarea compatibilității sistemului:

$$\begin{cases}nx - lz = \lambda\\ny - mz = \mu\\F(x,y,z) = 0\\G(x,y,z) = 0\end{cases}.$$

Se elimină x,y,z din 3 dintre ecuațiile sistemului, în funcție de λ și μ, și se înlocuiesc în cea de-a patra ecuație obținându-se *condiția de compatibilitate*: $\Phi(\lambda,\mu) = 0$. Înlocuind în condiția de compatibilitate λ și μ cu valorile date de ecuațiile lui (g) se obține ecuația $\Phi(nx - lz, ny - mz) = 0$, care reprezintă ecuația cilindrului generat.

1. Să se scrie ecuația cilindrului cu generatoarele paralele cu dreapta (d) x+y=0, z=0 și curba directoare (C) $x^2-2y^2-z=0$, x−1=0.

Soluție: Generatoarea cilindrului este o dreaptă paralelă cu dreapta (d) și se sprijină pe curba (C). Orice dreaptă paralelă cu (d) este dată prin ecuații de forma x+y=λ și z=μ. Condiția ca o astfel de dreaptă să se sprijine pe curba (C) (adică dreapta și curba să aibă un punct comun) este ca sistemul:

$$\begin{cases}x + y = \lambda\\z = \mu\\x^2 - 2y^2 - z = 0\\x - 1 = 0\end{cases}$$

să fie compatibil. Condiția de compatibilitate se obține eliminând pe x, y, z din acest sistem. Deoarece x = 1, y = λ−1, z = μ, din a treia ecuație a sistemului se obține: $1-2(\lambda-1)^2-\mu=0$ sau $2\lambda^2-4\lambda+\mu+1=0$ (condiția de compatibilitate).

Deci, dacă λ și μ verifică această relație, atunci dreapta x+y=λ, z=μ generează, când se deplasează paralel cu ea însăși și se sprijină pe curba (C), un cilindru. Ecuația cilindrului se obține eliminând pe λ și μ între ecuațiile:

$$\begin{cases}x + y = \lambda\\z = \mu\\2\lambda^2 - 4\lambda + \mu + 1 = 0\end{cases}$$

deci este: $2(x+y)^2-4(x+y)+z+1=0$, sau $2x^2+2y^2+4xy-4x-4y+z+1=0$.

2. Să se scrie ecuația cilindrului cu generatoarele paralele cu dreapta (d) x+y+z=0, x+2y+3z=0 și curba directoare $x^2+y^2+z^2-2=0$ și y=0.

Răspuns: $2x^2+y^2+2z^2+2xy+2yz-4=0$.

3. Să se scrie ecuația cilindrului cu generatoarele paralele cu dreapta de direcție (3, 4, 5) și curba directoare $x^2+z^2-2x-4z=$ și y=0.

Răspuns: $(4x-3y)^2+(4z-5y)^2-8(4x-3y)-16(4z-5y)=0$.

4. Să se scrie ecuația cilindrului cu generatoarele paralele cu dreapta de direcție (3, 4, 5) și curba directoare $y^2-z^2-1=$ și x=0.

Răspuns: $(3y-4x)^2-(3z-5x)^2-9=0$.

5. Să se scrie ecuația cilindrului cu generatoarele paralele cu dreapta (d) $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{-1}$ și curba directoare (C) $xy=a^2$, z=0.

Răspuns: $(x+2z)(y+3z)=a^2$.

6. Să se scrie ecuația cilindrului cu generatoarele paralele cu dreapta (d) x=y=z și curba directoare (C) $x = y^2$, z=0.

Răspuns: $(y-z)^2=x-z$.

7. Să se scrie ecuația cilindrului cu generatoarele paralele cu dreapta de direcție (1,1, 1) și curba directoare 2x+y−4z=0 și $x^2+y^2+z^2=a^2$.

Răspuns: $(3x+y-4z)^2+(2x+2y-4z)^2+(2x+y-3z)^2=a^2$.

8 Să se scrie ecuația cilindrului cu generatoarele paralele cu dreapta (d) $\frac{x-1}{5} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{2}$ și curba directoare cercul (C) $x^2+y^2=25$, z=0.

Răspuns: $\left(x-\frac{5}{2}z\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}z\right)^2=25$.

9. Să se scrie ecuația cilindrului cu generatoarele paralele cu dreapta (d) $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ și curba directoare parabola (C) $y^2=4x$, z=0.

Răspuns: $(3y-2z)^2-12(3x-z)=0$.

10. Să se scrie ecuația cilindrului care trece prin curba: $(x-1)^2+(y+3)^2+(z-2)^2=25$, x+y−z=−2 și are generatoarele paralele cu:

a) axa Ox;

b) dreapta de ecuații x=y și z=2.

Răspuns: a) $2y^2+2z^2-2yz+12y-10z-3=0$;

b) $x^2+y^2+3z^2-2xy-8x+8y-8z-26=0$.

11. Să se scrie ecuația cilindrului cu generatoarele paralele cu dreapta (d) x=y=z și curba directoare (C) $x^2+y^2-a^2=0$, z=0.

Răspuns: $(x-z)^2+(y-z)^2=a^2$.

12. Să se scrie ecuaţia cilindrului cu generatoarele paralele cu axa Oz şi curba directoare (C) $x^2+y^2-4x+2y-4=0$, $z=0$.

Răspuns: $x^2+y^2-4x+2y-4=0$.

13. Să se scrie ecuaţia cilindrului cu generatoarele paralele cu dreapta de direcţie (2,1, 2) şi curba directoare $x^2+y^2+z^2-1=0$ şi $2x-3y+z=0$.

Răspuns: $7x^2+36y^2+2z^2-28xy-8yz-3=0$.

14. Să se scrie ecuaţia cilindrului cu generatoarele paralele cu dreapta (d) $x=y=z$ şi tangent sferei (S) $(x-3)^2+y^2-z^2-1=0$.

Soluţie: Generatoarea cilindrului este o dreaptă paralelă cu (d) şi tangentă sferei. O dreaptă paralelă cu (d) este dată prin ecuaţii de forma: $x-y=\lambda$ şi $x-z=\mu$. Condiţia ca o astfel de dreaptă să fie tangentă la sfera dată este ca sistemul:

$$\begin{cases} x-y=\lambda \\ x-z=\mu \\ (x-3)^2+y^2+z^2-1=0 \end{cases}$$

să aibă o singură soluţie. Deoarece $y=x-\lambda$, $z=x-\mu$, ultima ecuaţie a sistemului devine: $(x-3)^2+(x-\lambda)^2+(x-\mu)^2-1=0$, sau $3x^2-2(3+\lambda+\mu)x+8+\lambda^2+\mu^2=0$. Această ecuaţie trebuie să aibă o singură soluţie, deci trebuie ca $\Delta=(3+\lambda+\mu)^2-3(8+\lambda^2+\mu^2)=0$. Dacă λ şi μ verifică această relaţie, atunci sistemul considerat are soluţie unică. Ecuaţia cilindrului se obţine eliminând pe λ şi μ între ecuaţiile:

$$\begin{cases} x-y=\lambda \\ x-z=\mu \\ (3+\lambda+\mu)^2-3\left(8+\lambda^2+\mu^2\right)=0 \end{cases},$$

deci este: $(3+x-y+x-z)^2-3(8+x^2-2xy+y^2+x^2-2xz+z^2)=0$ sau $(2x-y-z+3)^2-3(2x^2+y^2+z^2-2xy-2xz+8)=0$.

15. Să se scrie ecuaţia cilindrului cu generatoarele paralele cu dreapta (d) $x-y+z=0$, $2x+y-2z-3=0$ circumscris suprafeţei (S) $x^2+4y^2+9z^2=1$.

Răspuns: $(3x+48y-65z)^2-146(-x^2+36y^2+65z^2-6xz-96yz-9)=0$.

16. Să se scrie ecuaţia cilindrului circumscris sferei (S) $x^2+y^2+z^2=1$, ştiind că generatoarea formează unghiuri egale cu cele trei axe de coordonate.

Răspuns: $(2x-y-z)^2-3(2x^2+y^2+z^2-2xy-2xz-1)=0$.

17. Să se scrie ecuaţia cilindrului care are curba directoare $x=y^2+z^2$ şi $x=2z$ şi generatoarele perpendiculare pe planul curbei directoare.

Răspuns: $(2x+z)^2+25y^2-10(2x+z)=0$.

18. Să se scrie ecuaţia cilindrului care are curba directoare $x^2-2x+y=0$ şi $z=0$ şi generatoarele perpendiculare pe planul xOy.

Răspuns: $x^2-2x+y=0$.

19. Să se scrie ecuaţia cilindrului care are curba directoare $x^2-2y^2-z^2-9=0$ şi $z=3$ şi generatoarele perpendiculare pe planul $x-4y+3z=0$.

Răspuns: $(3x-z+3)^2-2(3y+4z-12)^2-162=0$.

§ 3. GENERAREA SUPRAFEŢELOR CONOIDALE

Suprafaţa conoidală sau *conoidul* este *suprafaţa riglată* generată de o dreaptă variabilă (g), numită *generatoare*, ce se deplasează rămânând paralelă cu un plan fix (π), numit *plan director*, se sprijină pe o curbă fixă (Γ), numită *curba directoare* şi pe o dreaptă fixă (d).

Fie (π) $Ax+By+Cz+D=0$ şi (d) $\begin{cases}\pi_1=0\\ \pi_2=0\end{cases}$. Generatoarea (g) fiind paralelă cu planul (π), se găseşte într-un plan (π_3) $Ax+By+Cz+D=\lambda$ şi pentru că se sprijină pe dreapta (d), se găseşte şi într-un plan din fascicolul generat de (d), (π_μ) $\pi_1=\mu\pi_2$.

Deci, curba generatoare are ecuaţiile: $(g)\begin{cases}\pi_3=\lambda\\ \pi_1=\mu\pi_2\end{cases}$.

Fie (Γ) $\begin{cases}F(x,y,z)=0\\ G(x,y,z)=0\end{cases}$ curba directoare. Condiţia ca generatoarea să se sprijine pe curba directoare revine la asigurarea compatibilităţii sistemului:

$$\begin{cases}\pi_3=\lambda\\ \pi_1=\mu\pi_2\\ F(x,y,z)=0\\ G(x,y,z)=0\end{cases}$$

Se elimină x,y,z din 3 dintre ecuaţiile sistemului, în funcţie de λ şi μ, şi se înlocuiesc în cea de-a patra ecuaţie obţinându-se *condiţia de compatibilitate*: $\Phi(\lambda,\mu)=0$.

Înlocuind în condiţia de compatibilitate λ şi μ cu π_3, respectiv cu $\dfrac{\pi_1}{\pi_2}$, se obţine ecuaţia $\Phi(\pi_3,\dfrac{\pi_1}{\pi_2})=0$, care reprezintă ecuaţia conoidului generat.

1. Să se scrie ecuaţia conoidului generat de o dreaptă care se sprijină pe dreapta $x=2$, $y=0$, este paralelă cu planul xOy şi întâlneşte hiperbola (H) $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{z^2}{9}=1$, $y=2$.

Soluţie: O dreaptă care se sprijină pe dreapta $x=2$, $y=0$ şi este paralelă cu planul xOy este dată prin ecuaţii de forma: $x-2=\lambda y$, $z=\mu$. Condiţia ca o astfel de dreaptă să întânească hiperbola dată este ca sistemul:

$$\begin{cases} x-2=\lambda y \\ z=\mu \\ \dfrac{x^2}{4}-\dfrac{z^2}{9}=1 \\ y=2 \end{cases}$$

să fie compatibil. Deoarece $x=2+2\lambda$, $z=\mu$, din a treia ecuaţie a sistemului se obţine: $\dfrac{(2+2\lambda)^2}{4}-\dfrac{\mu^2}{9}=1$ sau $9(1+\lambda)^2-\mu^2=9$. (condiţia de compatibilitate). Dacă λ şi μ verifică această relaţie, dreapta $x-2=\lambda y$, $z=\mu$ generează în deplasarea sa conoidul. Ecuaţia conoidului se va obţine eliminând pe λ şi μ. între ecuaţiile:

$$\begin{cases} x-2=\lambda y \\ z=\mu \\ 9(1+\lambda)^2-\mu^2=9 \end{cases}$$

deci este: $9\left(1+\dfrac{x-2}{y}\right)^2-z^2=9$, sau $9(x+y-2)^2-z^2y^2-9y^2=0$.

2. Să se scrie ecuaţia conoidului generat de o dreaptă care se sprijină pe axa Oz, este paralelă cu $x+z=0$ şi întâlneşte cercul (C) $x^2+y^2=1$, $z=0$.
Răspuns: $(x+z)^2(x^2+y^2)=x^2$.

3. Să se scrie ecuaţia conoidului generat de o dreaptă care este paralelă cu planul xOy şi se sprijină pe axa Oz şi pe curba (C) $y^2-2z+2=0$, $x^2-2z+1=0$.
Răspuns: $2x^2z-2x^2-2zy^2+y^2=0$.

4. Să se scrie ecuaţia conoidului generat de o dreaptă care este paralelă cu planul yOz şi se sprijină pe axa Ox şi pe curba (C) $z^2-2x=0$, $9y^2-16xz=0$.
Răspuns: $128xz^4-81y^4=0$.

5. Să se scrie ecuaţia conoidului generat de o dreaptă care este paralelă cu planul $z=0$ şi se sprijină pe axa Oz şi pe dreapta (d) $x=3$, $2z=y+1$.
Răspuns: $3y=2xz-x$.

6. Să se scrie ecuaţia conoidului generat de o dreaptă care este paralelă cu planul xOy şi se sprijină pe axa Oz şi pe dreapta (d) $x-z=0$, $x+2y-3=0$.
Răspuns: $xz+2yz-3x=0$.

7. Să se scrie ecuaţia conoidului generat de o dreaptă care este paralelă cu planul $x+y+z=0$ şi se sprijină pe axa Oz şi pe cercul (C) $x=b$, $y^2+z^2=a^2$.
Răspuns: $b^2y^2+(x^2+xy+xz-bx-by)^2=a^2x^2$.

8. Să se scrie ecuaţia conoidului generat de o dreaptă care este paralelă cu planul $z=0$ şi se sprijină pe dreapta $x=0$, $y+z=a$ şi pe cercul (C) $x^2+z^2=a^2$, $y=0$.
Răspuns: $x^2(z-a)^2+(y+z-a)^2(z^2-a^2)=0$.

9. Să se scrie ecuaţia conoidului generat de o dreaptă care este paralelă cu planul $z=0$ şi se sprijină pe dreapta $x=0$, $y=a$ şi pe parabola (P) $z^2-2px=0$, $y=0$.
Răspuns: $z^2(y-a)+2apx=0$.

10. Să se scrie ecuaţia conoidului generat de o dreaptă care este paralelă cu planul xOy, se sprijină pe axa Oz şi este tangentă sferei (S) $x^2+y^2+z^2-2Rx=0$.
Răspuns: $R^2x^2-z^2(x^2+y^2)=0$.

11. Să se scrie ecuaţia conoidului generat de o dreaptă care se sprijină pe axa Oz, se deplasează rămânând perpendiculară pe această axă şi este tangentă sferei (S) $(x-a)^2+y^2+z^2=R^2$.
Răspuns: $y^2(a^2+z^2-R^2)+x^2(z^2-R^2)=0$.

12. Să se scrie ecuaţia conoidului generat de o dreaptă care intersectează dreptele $x=0$, $z=a$, şi $y=0$, $z=-a$, rămânând paralelă cu planul $Ax+By+Cz+D=0$.
Răspuns: $Ax(z+a)+By(z-a)+C(z^2-a^2)=0$.

13. Să se scrie ecuaţia suprafeţei generată de o dreaptă care se sprijină pe dreptele: $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{0}=\dfrac{z}{-1}$; $\dfrac{x-2}{0}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{1}$ şi $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y+1}{0}=\dfrac{z}{1}$.
Răspuns. $x^2+4y^2-4z^2-4=0$.

§ 4. GENERAREA SUPRAFEŢELOR DE ROTAŢIE

O *suprafaţă de rotaţie* este generată de o curbă plană, numită *curba directoare*, care se roteşte în jurul unei axe, numită *axa de rotaţie*, din planul curbei.

Fie *curba directoare* (Γ) $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$ şi

axa de rotaţie (d) $\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}$.

Fiecare punct al curbei (Γ) descrie un cerc (C) care poate fi considerat ca fiind intersecţia unei sfere (S), cu centrul pe axa de rotaţie şi de rază variabilă, cu un plan variabil (π), perpendicular pe axa de rotaţie, astfel încât cercul să intersecteze curba directoare. Aceasta revine la faptul că sistemul format cu ecuaţiile cercului (C)

$$\begin{cases} (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=\lambda \\ lx+my+nz=\mu \end{cases}$$

împreună cu ecuaţiile curbei directoare trebuie să fie un sistem compatibil. Eliminând x, y, z, între cele patru ecuaţii ale sistemului:

$$\begin{cases} (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=\lambda \\ lx+my+nz=\mu \\ F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$$

se obține relația: $\Phi(\lambda,\mu)=0$, condiția de compatibilitate. Înlocuind în condiția de compatibilitate λ și μ cu valorile date în ecuațiile cercului (C) se obține ecuația generală a suprafeței de rotație: $\Phi\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2, lx+my+nz\right]=0$.

1. Să se scrie ecuația suprafeței generate prin rotirea curbei (Γ) $x^2-2y^2+z^2-5=0$, $x+z+3=0$ în jurul dreptei (d) $x=y=z$.

Soluție: Fiecare punct al curbei (Γ) descrie, prin rotirea în jurul dreptei (d), un cerc al cărui centru se află pe dreapta (d) și al cărui plan este perpendicular pe dreapta (d). Un astfel de cerc poate fi considerat ca fiind intersecția unei sfere cu centrul pe dreapta (d), cu un plan perpendicular pe dreapta (d), deci va fi dat de ecuațiile: $x^2+y^2+z^2=\lambda$, $x+y+z=\mu$. Condiția ca aceste cercuri să se sprijine pe curba (Γ) este ca sistemul:

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=\lambda \\ x+y+z=\mu \\ x^2-2y^2+z^2-5=0 \\ x+z+3=0 \end{cases}$$

să fie compatibil. Deoarece $z=-x-3$ și $y=\mu+3$, prima și a treia ecuație a sistemului devin: $\begin{cases} x^2+(\mu+3)^2+(x+3)^2=\lambda \\ x^2-2(\mu+3)^2+(x+3)^2-5=0 \end{cases}$ de unde rezultă prin scădere: $3(\mu+3)^2=\lambda-5$, condiția de compatibilitate. Ecuația suprafeței obținută prin rotirea curbei (Γ) în jurul dreptei (d) rezultă din eliminarea parametrilor λ și μ între ecuațiile:

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=\lambda \\ x+y+z=\mu \\ 3(\mu+3)^2=\lambda-5 \end{cases}$$

și este: $3(x+y+z+3)^2=x^2+y^2+z^2-5$.

2. Să se scrie ecuația suprafeței generate prin rotirea dreptei (d) $x-y=a$, $z=0$ în jurul dreptei $x=y=z$.

Răspuns: $2(x^2+y^2+z^2)-(x+y+z)^2=a^2$.

3. Să se scrie ecuația suprafeței generate prin rotirea dreptei (d) $x=a$, $z=\dfrac{b}{a}y$ în jurul axei Oz.

Răspuns: $\dfrac{x^2+y^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{b^2}=1$.

4. Să se scrie ecuația suprafeței generate prin rotirea dreptei (d) $x=3z+10$, $y+4z+5=0$ în jurul axei Oz.

Răspuns: $x^2+y^2-25(z+2)^2=25$.

5. Să se scrie ecuația suprafeței generate prin rotirea dreptei (d) $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{6}$, în jurul axei Ox.

Răspuns: $40(x-2)^2-9y^2-9z^2=0$.

6. Să se scrie ecuația suprafeței generate prin rotirea curbei (C) $z=e^{-x^2}$, $y=0$ în jurul axei Oz.

Răspuns: $z=e^{-(x^2+y^2)}$.

7. Să se scrie ecuația suprafeței generate prin rotirea dreptei (d) $x+z=a$, $y=0$ în jurul dreptei $x=a$, $y=a$.

Răspuns: $(x-a)^2+(y-a)^2-z^2-a^2=0$.

8. Să se scrie ecuația suprafeței generate prin rotirea dreptei (d) $\dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{3}$, în jurul axei Ox.

Răspuns: $13(x+3)^2-y^2-z^2=0$.

9. Să se scrie ecuația suprafeței generate prin rotirea dreptei (d) $\dfrac{x-7}{0}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{1}$, în jurul axei Oz.

Răspuns: $x^2+y^2-4z^2-49=0$.

10. Să se scrie ecuația suprafeței generate prin rotirea dreptei (d) $x-3z-4=0$, $y-4z+3=0$ în jurul axei Oz.

Răspuns: $x^2+y^2-25z^2-25=0$.

11. Să se scrie ecuația suprafeței generate prin rotirea dreptei (d) $x=y=z$ în jurul axei Oy.

Răspuns: $x^2-2y^2+z^2=0$.

12. Să se scrie ecuația suprafeței generate prin rotirea curbelor:

a) (C_1) $y^2+z^2=a^2$, $x=0$;

b) (C_2) $\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1=0$, $x=0$;

c) (C_3) $\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}-1=0$, $x=0$;

d) (C_4) $y^2-2pz=0$, $x=0$,

în jurul axei Oz.

Răspuns: a) $x^2+y^2+z^2=a^2$, sferă;

b) $\dfrac{x^2+y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1=0$, elipsoid;

c) $\dfrac{x^2+y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}-1=0$, hiperboloid cu o pânză,

d) $x^2+y^2-2pz=0$, paraboloid eliptic.

13. Să se scrie ecuația suprafeței generate prin rotirea curbei (C) $y=\sin x$, $z=0$ în jurul axei Ox.

Răspuns: $y^2+z^2-\sin^2 x=0$.

14. Să se scrie ecuația suprafeței generate prin rotirea hiperbolei (H) $xz=1$, $y=0$ în jurul axei Oz.

Răspuns: $z^2(x^2+y^2)=1$

15. Să se scrie ecuația suprafeței generate prin rotirea dreptei care trece prin punctul $A(2,1,0)$ și are direcția $(1,1,0)$ în jurul dreptei: $x-z=0$, $y-z=0$.

Răspuns: $x^2+y^2+z^2-2(xy+xz+yz)-1=0$.

16. Să se scrie ecuația unui con de rotație care are trei generatoare ce coincid cu axele de coordonate.

Răspuns: $xy+xz+yz=0$, cel ce se obține prin rotirea lui Oz în jurul dreptei $x=y=z$.

17. Fie curba (C) $x^2+y^2-1=0$, $x-z-1=0$. Să se scrie:

a) ecuația conului cu vârful în origine și curba directoare (C);

b) ecuația cilindrului cu generatoarele paralele cu dreapta $x=2z$, $y=-z$ și curba directoare (C);

c) ecuația suprafeței generate prin rotirea curbei (C) în jurul dreptei $z+1=0$, $x=0$.

Răspuns: a) $y^2+2xz-z^2=0$;

b) $(2z-x+2)^2+(x+y-z-1)^2=1$;

c) $\dfrac{x^2}{2}+y^2+\dfrac{(z+1)^2}{2}=1$.

CAPITOLUL VIII

CUADRICE

§1. SFERA

1. În fiecare din cazuri, să se scrie ecuația sferei dacă:

a) Sfera are centrul în punctul $A(2,-1,-3)$ și trece prin punctul $B(3,-2,1)$;

b) Punctele $A(2,-3,5)$ și $B(4,1,-3)$ sunt extremitățile unui diametru al sferei;

c) Sfera trece prin origine și are centrul în $C(4,-4,-2)$;

d) Sfera are centrul în origine și este tangentă planului:

$$16x-15y-12z+75=0;$$

e) Sfera este circumscrisă tetraedrului care are vârfurile:

$$O(0,0,0);\ A(2,0,0);\ B(0,4,0);\ C(0,0,6);$$

f) Sfera trece prin punctele $A(3,1,-3)$, $B(-2,4,1)$, $C(-5,0,0)$ și are centrul în planul:

$$2x+y-z+3=0.$$

Răspuns: a) $(x-2)^2+(y+1)^2+(z+3)^2=18$; b) $(x-3)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=21$;
c) $(x-4)^2+(y+4)^2+(z+2)^2=36$; d) $x^2+y^2+z^2=9$;
e) $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z=0$; f) $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=49$.

2. Să se scrie ecuația sferei cu centrul $C(4,7,-2)$ știind că sfera

$$x^2+y^2+z^2-4x-12y+36=0,$$

este tangentă interioară sferei căutate.

Răspuns: $(x-4)^2+(y-7)^2+(z+2)^2=25$

3. Să se scrie ecuația sferei care trece prin punctele $A(1,2,3)$, $B(3,-4,5)$ și are centrul pe dreapta:

$$(d)\ \begin{cases} x+y+z=5 \\ 2x+5y+3z=10 \end{cases}$$

Indicație: Centrul sferei se obține intersectând dreapta (d) cu planul mediator al segmentului (AB)

Răspuns: $x^2+y^2+z^2-6x+2y-6z+6=0$

4. Să se arate că punctele $A\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)$, $B(5,0,5)$, $C(0,1,1)$, $D\left(-\frac{1}{3},-\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)$, $E(6,-3,3)$ sunt situate pe aceeași sferă. Să se scrie ecuația sferei.

Răspuns: $x^2+y^2+z^2-2x+6y-8z=0$

5. Să se scrie ecuația diametrului sferei:

$$x^2+y^2+z^2+2x-6y+z-11=0$$

care este perpendicular pe planul:

$$5x-y+2z-17=0.$$

Răspuns: $\dfrac{x+1}{5}=\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{z+\frac{1}{2}}{2}$.

6. Să se scrie ecuația diametrului sferei:

$$x^2+y^2+z^2-x+3y+z-13=0$$

care este paralel cu dreapta:

$$\frac{x+1}{2}=\frac{y-5}{-3}=\frac{z-7}{4}.$$

Răspuns: $\dfrac{x-\frac{1}{2}}{2}=\dfrac{y+\frac{3}{2}}{-3}=\dfrac{z+\frac{1}{2}}{4}$.

7. Să se scrie ecuația unui cerc mare al sferei:

$$x^2+y^2+z^2-4x-12y+36=0$$

al cărui plan este perpendicular pe dreapta:

$$\begin{cases}x+y-3z+2=0\\2x-y+z-1=0\end{cases}.$$

Răspuns: $\begin{cases}x^2+y^2+z^2-4x-12y+36=0\\2x+7y+3z-46=0\end{cases}$

8. Să se afle centrul C și raza următoarelor cercuri:

a) $\begin{cases}(x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=100\\2x-2y-z+9=0\end{cases}$;

b) $\begin{cases}(x-4)^2+(y-7)^2+(z+1)^2=36\\3x+y-z-9=0\end{cases}$;

c) $\begin{cases}x^2+y^2+z^2-2x+6y-6z-6=0\\2x-6y+3z-1=0\end{cases}$

Indicație: Pentru a obține coordonatele centrului cercului se proiectează centrul sferei pe planul cercului.

Răspuns: a) C(-1,2,3), r = 8; b) C(1,6,0), r = 5; c) $C\left(-\frac{1}{7},\frac{3}{7},\frac{9}{7}\right)$, r = 3.

9. Să se afle ecuația sferei care trece prin punctul A(0,-3,1) și prin cercul de ecuații:

$$\begin{cases}x^2+y^2=16\\z=0\end{cases}$$

Indicație: Ecuația cercului se mai scrie: $x^2+y^2+z^2=16$, $z=0$. Sfera căutată se găsește printre sferele fasciculului:

$$x^2+y^2+z^2-16+\lambda z=0.$$

Răspuns: $x^2+y^2+(z+3)^2=25$.

10. Să se scrie ecuația sferei care trece prin origine și prin cercul:

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=25\\2x-3y+5z-5=0\end{cases}$$

Răspuns: $x^2+y^2+z^2-10x+15y-25z=0$.

11. Să se scrie ecuația sferei care trece prin două cercuri date:

$$\begin{cases}x^2+z^2=25\\y=2\end{cases},\quad\begin{cases}x^2+z^2=16\\y=3\end{cases}$$

Răspuns: $x^2+(y+2)^2+z^2=41$.

§2. CUADRICE PE ECUAȚIA REDUSĂ

1. Să se determine curbele de intersecție ale următoarelor suprafețe:

a) $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{z^2}{16}=1$;

b) $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}-\dfrac{z^2}{16}=1$;

c) $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}-\dfrac{z^2}{16}+1=0$;

d) $x^2+\dfrac{y^2}{4}=2z$;

e) $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=2z$,

cu planele de coordonate și să se schițeze grafic aceste suprafețe.

2. Să se determine curbele de intersecție ale următoarelor suprafețe:

a) $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16}+\dfrac{z^2}{25}=1$;

b) $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16}-\dfrac{z^2}{25}=1$;

c) $-\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16}-\dfrac{z^2}{25}=1$;

d) $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=2z$;

e) $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{25}=2z$,

cu planele de coordonate și să se schițeze grafic aceste suprafețe.

3. Să se scrie ecuațiile generatoarelor rectiliniii ce trec prin punctul A(6,2,8) și se află pe hiperboloidul cu o pânză .

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{16}=1$$

Răspuns: $\frac{x-6}{9}=\frac{y-2}{8}=\frac{z-8}{20}$,

$\frac{x-6}{3}=\frac{y-2}{0}=\frac{z-8}{4}$.

4. Să se scrie ecuațiile generatoarelor rectilinii ce trec prin punctul P(7,0,0) și se află pe cuadrica:

$$\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{16}-\frac{z^2}{4}=1.$$

Răspuns: $\frac{x-7}{0}=\frac{y}{2}=\frac{z}{1}$,

$\frac{x-7}{0}=\frac{y}{2}=\frac{z}{-1}$.

5. Să se scrie ecuațiile generatoarelor rectilinii ale suprafeței:

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{16}=1$$

care sunt paralele cu planul: 6x + 4y + 3z - 17 = 0.

Indicație: Generatoarele determină, într-un punct, planul tangent la cuadrică. Există pe suprafață două puncte: A(2,3,-4) și B(-2,-3,4) în care planele tangente sunt paralele cu planul dat.

Răspuns: $\begin{cases}y-3=0\\2x+z=0\end{cases}$, $\begin{cases}x-2=0\\4y+3z=0\end{cases}$, $\begin{cases}x+2=0\\4y+3z=0\end{cases}$, $\begin{cases}y+3=0\\2x+z=0\end{cases}$.

6. Se dă paraboloidul hiperbolic:

$$\frac{x^2}{4}-y^2=z.$$

Să se scrie generatoarele ce trec prin punctul A(2,-1,0) și cele care sunt paralele cu planul: x + 3y + z - 4 = 0.

Răspuns: $\begin{cases}z=0\\x+2y=0\end{cases}$, $\begin{cases}x-2y=4\\x+2y-z=0\end{cases}$, $\begin{cases}x-2y-4z=0\\x+2y-1=0\end{cases}$, $\begin{cases}x-2y+5=0\\5x+10y+4z=0\end{cases}$.

7. Să se arate că punctul A(1,3,-1) se află pe paraboloidul hiperbolic: $4x^2 - z^2 = y$ și să se scrie ecuațiile generatoarelor rectilinii ce trec prin A.

Răspuns: $\frac{x-1}{1}=\frac{y-3}{4}=\frac{z+1}{-2}$, $\frac{x-1}{1}=\frac{y-3}{12}=\frac{z+1}{2}$.

8. Să se scrie generatoarele rectilinii ale paraboloidului:

$$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=z$$

care sunt paralele cu planul: 3x + 2y - 4z = 0.

Răspuns: $\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{1}$; $\frac{x-4}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z}{2}$.

9. Să se determine unghiul α format de generatoarele rectilinii ale suprafeței:

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{16}=1$$

ce trec prin punctul A(6,-2, -8).

Răspuns: $\cos\alpha=\frac{107}{5\sqrt{545}}$.

10. Să se arate că punctul A(-2,0,1) se află pe paraboloidul hiperbolic:

$$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=z$$

și să se determine unghiul ascuțit α făcut de cele două generatoare ce trec prin A.

Răspuns: $\cos\alpha=\frac{1}{17}$.

11. Să se determine unghiul făcut de generatoarele rectilinii ale suprafeței:

$$9x^2 - z^2 = y$$

ce trec prin punctul A(0,-1,1).

Răspuns: $\cos\alpha=\frac{22}{23}$.

§ 3. CUADRICE PE ECUAȚIA GENERALĂ

1. Să se reducă la forma canonică cuadrica:

$$7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4yz - 4xy - 6x - 24y + 18z + 30 = 0$$

scriind și relațiile de transformare a coordonatelor.

Răspuns: $\frac{X^2}{2}+\frac{Y^2}{1}+\frac{Z^2}{\frac{2}{3}}=1$, elipsoid; $x=\frac{X-2Y+2Z}{3}+1$,

$y=\frac{2X-Y-2Z}{3}+2$, $z=\frac{2X+2Y+Z}{3}-1$.

2. Să se aducă la forma canonică ecuația cuadricei

$$x^2+ 3y^2 + 4yz - 6x + 8y + 8 = 0$$

scriind și relațiile de transformare ale coordonatelor.

Răspuns: $X^2+4Y^2-Z^2=1$, hiperboloid cu o pânză; $x=X+3$,

$y=\frac{Y+2Z}{\sqrt{5}}$, $z=\frac{-2Y+Z}{\sqrt{5}}-2$.

3. Să se precizeze natura cuadricei și să se reducă la forma canonică:

$$2x^2 - 2y^2 + 2z^2 + 4xz + 4y - 5 = 0.$$

Răspuns: $4X^2-2Y^2+4Y+5=0$, cilindru hiperbolic; $x=\frac{X-Z}{\sqrt{2}}$,

$y=Y$, $z=\frac{X+Z}{\sqrt{2}}$.

4. Să se reducă la forma canonică ecuaţiile cuadricelor:

a) $4x^2 + 5y^2 + 6z^2 - 4xy + 4yz + 4x + 6y + 4z - 27 = 0$;

b) $5x^2 - 4y^2 - 11z^2 - 24yz - 10x - 15 = 0$;

c) $2x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xy + 2xz + 2yz - 4x + 6y - 2z + 3 = 0$;

d) $xy - yz - xz + 2z = 2$;

e) $x^2 - 2y^2 + z^2 + 4xy - 8xz - 4yz - 14x - 4y + 14z + 16 = 0$;

f) $y^2 - z^2 + 4xy - 4xz - 3 = 0$;

g) $4x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xz - 4yz + 8x - 4y + 8z = 0$.

Răspuns: a) $2x^2 + 5y^2 + 8z^2 - 32 = 0$, elipsoid; b) $x^2 + y^2 - 4z^2 - 4 = 0$, hiperboloid cu o pânză; c) $2x^2 + 5y^2 - 5\sqrt{2}\,z = 0$, paraboloid eliptic; d) $x^2 + y^2 - 2z^2 + 2 = 0$, hiperboloid cu două pânze; e) $x^2 + y^2 - 2z^2 = 0$, con; f) $x^2 - y^2 = 1$, cilindru hiperbolic; g) $x^2 + 2y^2 = 2$, cilindru eliptic.

CAPITOLUL IX

ELEMENTE DE GEOMETRIE DIFERENŢIALĂ A CURBELOR PLANE

§1. TIPURI DE ECUAŢII ALE CURBELOR PLANE

O curbă în planul (xOy) poate fi dată prin:

1.1. Ecuaţia carteziană explicită: $y = f(x)$, $x \in \mathbf{R}$.

Exemplu:

$$y = x^2,\ x \in \mathbf{R}\ \ (\textit{parabolă}).$$

1.2. Ecuaţia carteziană implicită: $F(x,y) = 0$.

Exemplu:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0\ \ (\textit{elipsă})$$

sau

$$x^2 + y^2 = R^2\ \ (\textit{cercul cu centrul în origine şi de rază } R).$$

1.3. Ecuaţii parametrice: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $t \in I \subset \mathbf{R}$.

Exemplu:

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases},\ t \in [0, 2\pi]\ \ (\textit{elipsă})$$

sau

$$\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases},\ t \in [0, 2\pi]\ \ (\textit{cercul cu centrul în origine şi de rază } R).$$

1.4. Ecuaţia în coordonate polare: $\rho = \rho(\theta)$, unde ρ este *raza vectoare*, θ - *unghiul polar* iar

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases},\ \theta \in I \subset \mathbf{R}.$$

Exemplu: $\rho = R$, (*cercul cu centrul în origine şi rază* R).

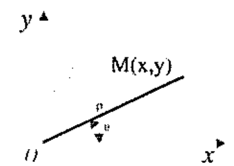


figura 1

§2. CURBE PLANE REMARCABILE

2.1 CICLOIDA.

Cicloida este curba descrisă de un punct de pe circumferinţa unui cerc care rulează, fără să alunece pe o dreaptă fixă.

Ecuaţiile ei parametrice sunt:

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

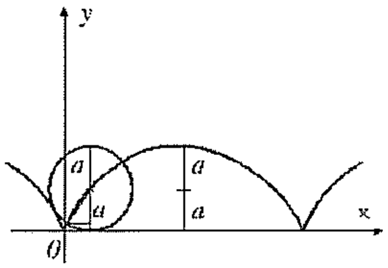


figura 2

2.2 EPICICLOIDA.

Epicicloida este curba descrisă de un punct de pe circumferinţa unui cerc care rulează, fără să alunece pe un alt cerc exterior, fix.

Ecuaţiile ei parametrice sunt:

$$\begin{cases} x = (a+b)\cos t - b\cos\dfrac{a+b}{b}t \\ y = (a+b)\sin t - b\sin\dfrac{a+b}{b}t \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

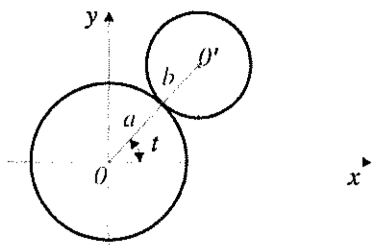


figura 3

2.3 CARDIOIDA.

Cardioida este epicicloida în care cele două cercuri au raze egale:

$x^2 + y^2 + 2ax = 2a\sqrt{x^2 + y^2}$ (*ecuaţia carteziană implicită*),

$\rho = 2a(1 - \cos\theta)$ (*ecuaţia în coordonate polare*).

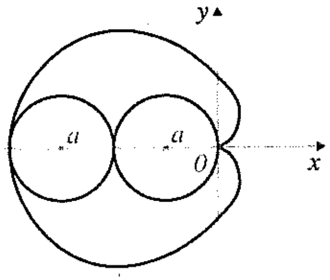


figura 4

2.4 HIPOCICLOIDA.

Hipocicloida este curba descrisă de un punct de pe circumferinţa unui cerc care rulează, fără să alunece, pe un alt cerc fix, cercurile fiind interioare.

Ecuaţiile parametrice sunt:

$$\begin{cases} x = (a-b)\cos t + b\cos\dfrac{a-b}{b}t \\ y = (a-b)\sin t - b\sin\dfrac{a-b}{b}t \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

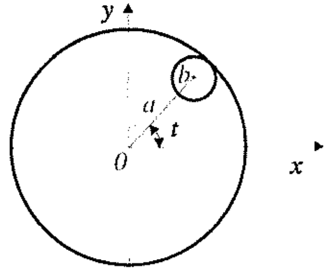


figura 5

2.5 ASTROIDA.

Astroida este hipocicloida cu patru ramuri simetrice. In acest caz raza cercului mobil este a patra parte din raza cercului fix.

Ecuaţiile parametrice sunt:

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}, \quad t \in [0,2\pi].$$

Ecuaţia implicită:

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

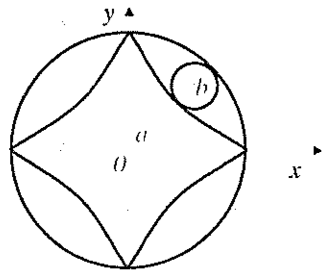


figura 6

2.6 SPIRALA LUI ARHIMEDE.

Spirala lui Arhimede ia naştere prin deplasarea unui punct cu o viteză uniformă pe o semidreaptă în timp ce semidreapta se roteşte în jurul unei extremităţi fixe cu o viteză unghiulară constantă.

Ecuaţia ei în coordonate polare este:

$$\rho = k\theta,\ k>0.$$

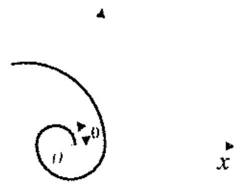


figura 7

2.7 LEMNISCATA.

Lemniscata este locul geometric al punctelor luate în aşa fel, încât produsul distanţelor la două puncte fixe să fie constant şi egal cu pătratul jumătăţii distanţei între cele două puncte fixe.

Ecuaţia ei în coordonate polare este:

$$\rho^2 = 2a^2 \cos 2\theta,\ \theta \in [0,2\pi].$$

Ecuaţia implicită:

$$(x^2 + y^2)^2 = 2\, a^2 (x^2 - y^2).$$

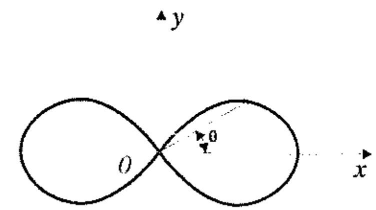


figura 8

ALTE CURBE PLANE

2.8 LĂNŢIŞORUL.

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) \quad \text{sau} \quad y = a\,\mathrm{ch}\frac{x}{a},\ a>0.$$

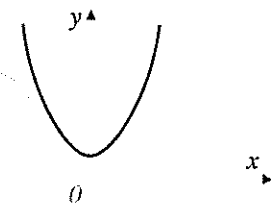


figura 9

2.9 FOLIUL LUI DESCARTES.

Ecuaţiile parametrice sunt:

$$\begin{cases} x = \dfrac{3at}{1+t^3} \\ y = \dfrac{3at^2}{1+t^3} \end{cases}, \quad t \in \mathbf{R}, a>0.$$

Ecuaţia implicită:

$$x^3 + y^3 - 3\,axy = 0.$$

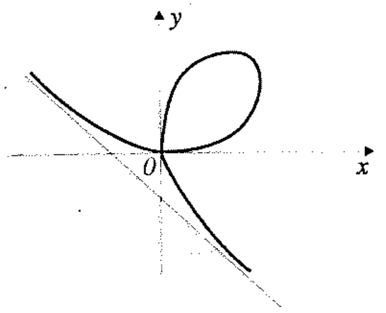


figura 10

2.10 CURBA LUI GAUSS.

Ecuaţia explicită este:

$$y = e^{-x^2},\ x \in \mathbf{R}.$$

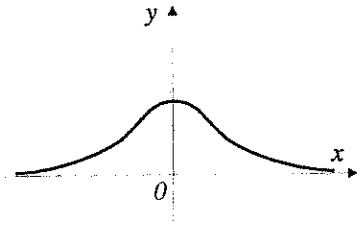


figura 11

2.11 STROFOIDA.

Ecuaţia carteziană:

$$y^2 = x^2\frac{a+x}{a-x}.$$

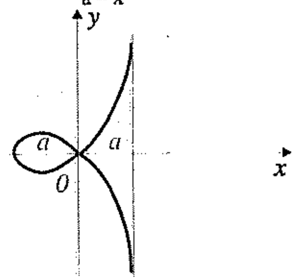


figura 12

§3. TANGENTA ŞI NORMALA LA O CURBĂ PLANĂ

1. Să se scrie ecuaţiile tangentelor şi normalelor la curbele:
a) $y = x^3$, în punctele A,B de abscise 0 şi 1;

b) $y = \sin x$, în punctele A,B de abscise 0 şi $\frac{\pi}{2}$.

Soluţie: Fie o curbă (C) de ecuaţie:

$$(C)\ y = f(x)$$

şi punctul $M_1(x_1,y_1)$ de pe curbă. Dacă funcţia f este derivabilă într-o vecinătate a punctului x_1, atunci ecuaţia tangentei la (C) în M_1 este:

$$y - y_1 = f'(x_1)(x - x_1) \qquad (1)$$

iar ecuaţia normalei este:

$$y - y_1 = -\frac{1}{f'(x_1)}(x - x_1). \qquad (2)$$

a) Pentru curba $y = x^3$ găsim A(0,0) şi B(1,1) iar $f'(x) = 3x^2$. De aici în punctul A, $f'(0) = 0$ şi respectiv în B, $f'(0) = 3$. Inlocuind în ecuaţiile (1) şi (2) se obţine: în punctul A: $y = 0$, tangenta, respectiv $x = 0$, normala iar în punctul B: $3x-y-2 = 0$, tangenta, respectiv $x + 3y - 4 = 0$, normala.

b) In punctul A: $y = x$ şi $y = -x$, sunt tangenta şi respectiv normala iar în B: $y = 1$, tangenta şi respectiv $x = \frac{\pi}{2}$, normala.

2. Să se scrie ecuaţiile tangentelor şi normalelor la curbele:

a) $x^3 + y^3 - 3axy = 0$, în $A\left(\frac{3a}{2}, \frac{3a}{2}\right)$;

b) $(x^2 + y^2)x - ay^2 = 0$, în $B\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$.

Soluţie: Fiind dată curba (C) prin ecuaţia:

$$(C)\quad f(x,y) = 0,$$

ecuaţia tangentei în punctul $M_1(x_1,y_1)$ situat pe curbă, în care funcţia *f* are derivate parţiale de ordinul întâi şi care nu se anulează simultan, este:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{M_1}(x - x_1) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{M_1}(y - y_1) = 0.$$

Ecuaţia normalei este:

$$\frac{x - x_1}{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{M_1}} = \frac{y - y_1}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{M_1}},$$

unde indicele M_1 arată că derivata parţială este calculată în acest punct.

a) Obţinem $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3ay$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 3ax$, $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_A = \frac{9a^2}{4}$ şi $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_A = \frac{9a^2}{4}$.

Tangenta în A are ecuaţia $x + y - 3a = 0$ iar normala este de ecuaţie $x - y = 0$.

b) Procedând analog obţinem tangenta în B: $4x - 2y - a = 0$ iar normala $2x + 4y - 3a = 0$.

3. Să se scrie ecuaţiile tangentelor şi normalelor la curbele:

a) $\begin{cases} x = t^3 - 2t \\ y = t^2 + 1 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$, în punctele $A(t = 2)$, $B(t = 1)$;

b) Cicloida în punctele $A(t = \frac{\pi}{2})$, $B(t = \pi)$.

Soluție: Fiind dată curba (C) prin ecuațiile parametrice: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ tangenta în punctul $M(t = t_1)$, în care funcțiile $x=x(t)$ și $y=y(t)$ sunt derivabile și cel puțin una dintre derivate este nenulă, are ecuația:

$$\frac{x - x(t_1)}{x'(t_1)} = \frac{y - y(t_1)}{y'(t_1)}.$$

Normala în M are ecuația:

$$x'(t_1)[x - x(t_1)] + y'(t_1)[y - y(t_1)] = 0.$$

a) Calculăm coordonatele punctului $A(t = 2)$. Găsim $A(4,5)$, apoi caculăm derivatele $x'(t) = 3t^2 - 2$, $y'(t) = 2t$. Deci $x'(2) = 10$; $y'(2) = 4$. Atunci ecuația tangentei este: $2x - 5y + 17 = 0$ iar cea a normalei : $5x + 2y - 30 = 0$.
Analog se găsesc pentru punctul B: tangenta $2x - y + 4 = 0$ și normala $x + 2y - 3 = 0$

b) Ecuațiile parametrice ale cicloidei sunt:

$$x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t).$$

Tangenta în A are ecuația: $x - y - a(\frac{\pi}{2} - 2) = 0$ iar normala: $x + y - a\frac{\pi}{2} = 0$. Pentru punctul B găsim analog tangenta $y = 2a$ iar normala: $x = a\pi$.

4. Să se scrie ecuațiile tangentelor și normalelor la curbele:
a) $y = x\ln|x|$, în punctul de abscisă $x = 1$;

b) $y = \operatorname{tg} x$, în punctele A, B, C, respectiv de abscise $-\frac{\pi}{4}, 0, \frac{\pi}{4}$;

c) $\begin{cases} x = \dfrac{1}{t+1} \\ y = \dfrac{t}{t+1} \end{cases}$, în $A(t = 1)$ și $B(t = 0)$;

d) $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$, în $A(t = \frac{\pi}{4})$;

e) $(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0$, în $A(a\sqrt{2}, 0)$;
f) $x^3 + 3x^2y - y^2 - 2x + 9 = 0$, în $M(2,-1)$;
g) $x^3 - xy^2 + 2x + y - 3 = 0$, în punctul ei de intersecție cu axa Ox.

Răspuns: a) (T) $x = y+1$, (N) $x + y - 1 = 0$;

b) în A, (T): $2x - y + \frac{\pi}{2} - 1 = 0$, (N): $x + 2y + 2 + \frac{\pi}{4} = 0$.
în B (T): $y = x$, (N): $x + y = 0$,
în C (T): $2x - y + 1 - \frac{\pi}{2} = 0$, (N): $x + 2y - 2 - \frac{\pi}{4} = 0$,

c) în A (T): $x + y - 1 = 0$, (N): $x - y = 0$,
în B (T): $x + y - 1 = 0$, (N): $x - y - 1 = 0$;

d) (T): $x + y - \frac{a\sqrt{2}}{2} = 0$, (N): $x - y = 0$,

e) (T): $x - a\sqrt{2} = 0$, (N): $y = 0$;
f) (T): $x - 7y - 9 = 0$, (N): $7x + y - 13 = 0$;
g) (T): $5x + y - 5 = 0$, (N): $x - 5y - 1 = 0$.

5. Să se găsească ecuațiile tangentelor la curba $y = x^3$, paralele cu o dreaptă având panta egală cu m, $m>0$.

Indicație: Ecuația tangentei are forma $y = mx + \lambda$. Dacă $M_0(x_0,y_0)$ este un punct de pe curbă unde tangenta are proprietatea cerută, atunci m coincide cu derivata funcției $f(x)=x^3$ în M_0. De aici se obțin x_0, y_0 în funcție de m și cum M_0 se află pe tangentă găsim valorile lui λ.

Răspuns: $y = mx \pm \frac{2m}{3}\sqrt{\frac{m}{3}}$.

6. Fiind dată curba de ecuație vectorială:

$$\vec{r} = (t^2 - 1)\vec{i} + (t^3 + 1)\vec{j}$$

să se determine tangentele la curbă paralele cu dreapta de ecuație $2x - y + 3 = 0$.

Răspuns: Din condiția de paralelism se găsesc $t_1 = \frac{4}{3}$ și $t_2 = 0$. In primul caz găsim tangenta $y = 2x + \frac{49}{27}$. In cel de-al doilea caz ambele derivate, ale lui $x=x(t)$ și respectiv $y=y(t)$, se anulează (*punct singular*). Cum $x''(0)=2\neq 0$, $y''(0)=0$, în acest caz tangenta are ecuația $\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{0}$, dreaptă ce nu este paralelă cu dreapta dată.

7. Să se scrie ecuațiile tangentelor la curba $x^3 - y^3 - 3x^2 = 0$ paralele cu bisectoarea întâi a axelor de coordonate.

Răspuns: Ecuația unei tangente paralele cu prima bisectoare are forma $y = x+\lambda$. Punând condiția ca ea să intersecteze curba în două puncte confundate se obțin tangentele $y = x$ și $y = x - 4$.

§4. PUNCTE SINGULARE ALE UNEI CURBE PLANE

1. Să se găsească punctul singular al foliumului lui Descartes:

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0,\ a>0$$

și tangentele în acest punct.

Soluție: Un punct $M(x_0,y_0)$ al curbei

$$f(x,y) = 0 \qquad (1)$$

este punct singular, dacă sistemul format din ecuația (1) și din:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

este verificat de coordonatele lui M.

Un punct singular este dublu dacă pentru coordonatele sale, cel puţin una din derivatele parţiale de ordinul al doilea este diferită de zero. In general coeficienţii unghiulari ai tangentelor în punctul dublu sunt daţi de ecuaţia:

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y^2}\right)_M m^2 + 2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_M m + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_M = 0. \quad (3)$$

In cazul problemei:

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3axy,$$
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3ay,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 3ax.$$

Rezolvând sistemul:

$$\begin{cases} x^2 - ay = 0 \\ y^2 - ax = 0 \end{cases}$$

rezultă soluţiile:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_2 = a \\ y_2 = a \end{cases}.$$

Dintre aceste perechi de soluţii numai prima verifică ecuaţia f(x,y) = 0. Deci foliumul lui Descartes are un punct singular în origine.

Avem

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -3a, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y.$$

Deci $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -3a \neq 0$ în origine iar O(0,0) este punct dublu.

Ecuaţia (3) devine: -6am = 0 sau m = 0. Ea are rădăcinile: $m_1 = 0$; $m_2 = \infty$. Rezultă că tangentele în O(0,0) la curbă sunt chiar axele de coordonate.

2. Să se studieze natura punctelor singulare ale curbei dată prin ecuaţia:

$$y^2 - (x-a)^2(x-b) = 0.$$

Soluţie: Ecuaţia curbei se poate scrie:

$$y^2 - x^3 + (2a+b)x^2 - (a^2 + 2ab)x + a^2 b = 0.$$

Atunci $\frac{\partial f}{\partial x} = -3x^2 + (4a+2b)x - (a^2+2ab) = (x-a)(-3x+a+2b), \frac{\partial f}{\partial y} = 2y.$

Observăm că ecuaţiile: f(x,y) = 0, $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ sunt verificate pentru valorile: x = a, y = 0 şi

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -6x + 4a + 2b, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$$

Deoarece $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ nu se anulează pentru nici o valoare a parametrilor a şi b, rezultă că punctul M(a,0) este punctul dublu.

Pantele tangentelor sunt date de ecuaţia:

$$2m^2 - 2(a-b) = 0$$

sau:

$$m_{1,2} = \pm\sqrt{a-b}$$

i) Dacă a > b punctul singular este un nod cu două tangente distincte:

$$y = (x-a)\sqrt{a-b} \text{ şi } y = -(x-a)\sqrt{a-b}.$$

ii) Dacă a = b punctul este punct de întoarcere şi tangenta unică în acest punct este dreapta y = 0 adică axa Ox.

iii) Dacă a < b, tangentele sunt imaginare, adică punctul M(a,0) este punct izolat al curbei.

3. Să se găsească punctul singular al lemniscatei lui Bernoulli:

$$(x^2+y^2)^2 - 2a^2(x^2-y^2) = 0, \ a>0$$

şi tangentele în acest punct.

Răspuns: (0,0) punct dublu - nod. Ecuaţiile tangentelor în O(0,0) sunt: y = x; y = -x.

4. Să se afle ce fel de punct este originea pentru curba.

$$x^4 - 8xy^3 + 64y^2 = 0$$

Răspuns: O(0,0) punct dublu de întoarcere. Ecuaţia tangentei în O(0,0) este y = 0.

5. Pentru fiecare din curbele următoare se afle punctele singulare, să se determine natura lor şi să se scrie, în cazul când există, ecuaţiile tangentelor în aceste puncte:

a) $y^2 = \frac{x^3}{2a-x}, a \neq 0;$

b) $y^2 = x^2(9-x^2);$

c) $(x^2+y^2)x - ay^2 = 0, \ a \neq 0;$

d) $y^2 = x(x+1)^2;$

e) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y^2} = y;$

f) $xy^2 - x^2 - y^2 = 0;$

g) $x^4 - 16x^2 + 16y^2 = 0.$

Răspuns: a) O(0,0) punct dublu de întoarcere: y = 0;
b) O(0,0) nod, $y = \pm 3x$;
c) O(0,0) punct de întoarcere: y = 0;
d) M(-1,0) punct izolat;
e) curba nu are puncte singulare;
f) O(0,0) punct izolat;
g) O(0,0) nod $y = \pm x$.

§5. CONTACTUL CURBELOR. CERC OSCULATOR. CURBURĂ

1. Să se găsească ordinul contactului în origine al curbelor:

$$(C_1): y = x^4,$$
$$(C_2): y = x^2 \sin^2 x.$$

Soluţie: Două curbe (C_1): y = f(x) şi (C_2): y = g(x) au în punctul lor comun M de abscisă x_0 un contact de ordinul n dacă sunt îndeplinite condiţiile:

$f(x_0) = g(x_0),\quad f^{(i)}(x_0) = g^{(i)}(x_0) \qquad (i = 1,2,\ldots,n)$ şi $f^{(n+1)}(x_0) \neq g^{(n+1)}(x_0)$.

Pentru exercițiul propus notăm $f(x) = x^4$ şi $g(x) = x^2\sin^2 x$. Calculând derivatele în origine găsim: $f(0) = g(0);\ f'(0) = g'(0), \ldots, f^{(V)}(0) = g^{(V)}(0)$ şi $f^{(VI)}(0) \neq g^{(VI)}(0)$. Curbele au contact de ordinul al cincilea în origine.

2. Să se scrie ecuațiile cercurilor osculatoare pentru curbele:

a) $y = \sin x$ în $A\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$;

b) $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ în punctul corespunzător lui $t = \pi$.

Soluție: Cercul osculator într-un punct M la o curbă este cercul care are cu curba în M un contact de ordinul al doilea.

Coordonatele centrului $C(\alpha,\beta)$ şi raza R a cercului osculator sunt date de formulele:

$$\begin{cases} \alpha = x - \dfrac{y'(1+y'^2)}{y''} \\ \beta = y + \dfrac{1+y'^2}{y''} \end{cases},\quad R = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|} \qquad (1)$$

pentru curbele date printr-o ecuație carteziană explicită şi:

$$\begin{cases} \alpha = x - \dfrac{\dot{y}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)}{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}} \\ \beta = y + \dfrac{\dot{x}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)}{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}} \end{cases},\quad R = \frac{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{3/2}}{|\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}|} \qquad (2)$$

pentru curbele date prin ecuații parametrice.

Observație.

Raza cercului osculator coincide cu raza de curbură în punct la curbă.

Dacă pe normala în punct la curbă, dirijată spre concavitatea curbei se ia o lungime egală cu raza de curbură, se obține un punct numit *centru de curbură*. Cercul cu centru în centrul de curbură şi cu raza egală cu raza de curbură se numeşte *cerc de curbură*. (Coordonatele centrului cercului osculator sunt şi coordonatele centrului de curbură).

In cazul problemei avem:

a) Folosim formulele (1). Deoarece

$$y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,\ y''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1,\ \alpha = \frac{\pi}{2},\ \beta = 0,\ R = \frac{1}{|-1|} = 1,$$

ecuația cercului osculator este: $\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + y^2 =$

b) Folosind formulele (2). Calculăm $\dot{x}(\pi) = 2a,\ \ddot{x}(\pi) = 0,\ \dot{y}(\pi) = 0,\ \ddot{y}(\pi) = -a$.

Rezultă: $\alpha = \pi a,\ \beta = -2a$ şi $R = 4a$. Deci ecuația cercului osculator este

$$(x - \pi a)^2 + (y + 2a)^2 = 16a^2.$$

3. Să se găsească ordinul contactului în origine al curbelor:

a) (C_1): $y = \sin x$, (C_2): $y = \mathrm{tg}\,x$;

b) (C_1): $y = x^3$, (C_2): $y = x\sin x$.

Răspuns: a) Contact de ordinul al doilea; b) Contact de ordinul întâi.

4. Să se calculeze raza de curbură a curbelor:

a) $y = x^3 - x^2 + 2x - 2$, în punctul A de intersecție al ei cu axa Ox;

b) $y^2 = 8x$, în $A\left(\frac{9}{8}, 3\right)$;

c) $y = \ln|\sec x|$, într - un punct oarecare $M(x,y)$ al curbei;

d) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$, într – un punct oarecare $M(x,y)$;

e) $y = x + e^{\frac{1}{x}}$, în $A(1, 1+e)$;

f) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, într – un punct oarecare $M(x,y)$ al curbei (astroida);

g) $\begin{cases} x = \sin t \\ y = t\cos t \end{cases}$, în punctele $A\left(t = \frac{\pi}{2}\right)$; $B(t = \pi)$;

h) $\begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t) \\ y = a(\sin t - t\cos t) \end{cases}$, în punctul $A\left(t = \frac{\pi}{2}\right)$;

i) $\rho = a(1 + \cos\theta)$, într – un punct oarecare al curbei (cardioida);

j) $\rho^2 = a^2\cos 2\theta$, într – un punct oarecare al curbei (lemniscata).

Indicație: La punctele i) şi j) folosim formula:

$$R = \frac{\left(\rho^2 + \rho'^2\right)^{\frac{3}{2}}}{|\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''|}.$$

Răspuns:

a) $A(1,0), R = \dfrac{5\sqrt{10}}{2}$; b) $R = 7\dfrac{13}{16}$; c) $R = \sec x$; d) $R = \dfrac{2(x+y)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{a}}$;

e) $R = \dfrac{(2 - 2e + e^2)^{\frac{3}{2}}}{3e}$; f) $R = 3(axy)^{\frac{1}{3}}$;

g) $R_A = \dfrac{\pi^2}{4}$, $R_B = \dfrac{2\sqrt{2}}{\pi}$; h) $R = \dfrac{\pi a}{2}$;

i) $R = \dfrac{4a\cos\frac{\theta}{2}}{3}$; j) $R = \dfrac{a^2}{3\rho}$.

5. Să se găsească raza de curbură a lănțişorului:

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

într-un punct oarecare şi ecuaţia cercului osculator în punctul A de abscisă x = 0. Să se arate că ordonata unui punct a lănţişorului este medie proporţională între raza de curbură în acel punct şi raza de curbură a vârfului lănţişorului.

Răspuns: $R=\frac{a}{4}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)^2$, $R_A=a$, $x^2+y^2-4ay+3a^2=0$.

6. Să se găsească coordonatele centrului de curbură la hiperbola $xy = a^2$ în punctul $M(1,a^2)$.

Răspuns: Se folosesc ecuaţiile parametrice:

$$\begin{cases} x = ae^t \\ y = ae^{-t} \end{cases}.$$

Se obţine:

$$\alpha=\frac{a^4+3}{2};\quad \beta=\frac{1+3a^4}{2a^2}.$$

7. Să se afle punctele de intersecţie între curba: $y=\frac{x^2}{4}$ şi cercul de curbură al acestei curbe în punctul A(2,1).

Răspuns: Cercul de curbură: $(x + 2)^2 + (y - 5)^2 = 32$. Rezultă A(2,1) şi B(-6,9).

8. Fiind dată elipsa:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0,$$

să se scrie ecuaţiile cercurilor osculatoare în vârfurile A(a,0) şi B(0,b).

Răspuns: Se folosesc ecuaţiile parametrice: $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$.

Se obţine: $\left(x-\frac{a^2-b^2}{a}\right)^2+y^2=\frac{b^4}{a^2}$, în A şi

$$x^2+\left(y+\frac{a^2-b^2}{b}\right)^2=\frac{a^4}{b^2}\quad \text{în B.}$$

9. Să se determine parabola $y = ax^2 + bx + c$ care are în punctul $A\left(\frac{\pi}{2},1\right)$ tangenta comună şi aceiaşi curbură cu: y = sinx.

Răspuns: $y=-\frac{1}{2}x^2+\frac{\pi}{2}x+1-\frac{\pi^2}{8}$ sau $y=\frac{1}{2}x^2-\frac{\pi}{2}x+1+\frac{\pi^2}{8}$.

10. Să se arate că raza de curbură a curbei $y^2 = 1 + e^x$ într-un punct M este egală cu segmentul cuprins între punctele de intersecţie ale tangentei şi normalei în M cu axa Ox.

§6. INFĂŞURĂTOAREA UNEI FAMILII DE CURBE. EVOLUTA UNEI CURBE

1. Să se găsească înfăşurătoarea familiei de drepte:

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - a = 0,$$

α fiind un parametru.

Soluţie: Se ştie că fiind dată familia de curbe cu un parametru

$$f(x,y,\alpha) = 0 \quad (\alpha\text{- parametru}), \qquad (1)$$

ecuaţiile parametrice ale înfăşurătoarei familiei de curbe se obţin din sistemul format din ecuaţia (1) şi

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha}=0. \qquad (2)$$

In cazul problemei avem:

$$\begin{cases} f(x,y,\alpha)=x\cos\alpha+y\sin\alpha-a=0 \\ \frac{\partial f}{\partial \alpha}=-x\sin\alpha+y\cos\alpha=0 \end{cases}$$

Se obţine din acest sistem y = asin α şi x= acos α, de unde $x^2 + y^2 = a^2$. Deci înfăşurătoarea este un cerc.

2. Să se afle evoluta următoarelor curbe:

a) $y=\frac{x^2}{4};x\in\mathbf{R}$;

b) $\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}, t\in\mathbf{R}$.

Soluţie: Se numeşte evoluta unei curbe înfăşurătoarea normalelor sale. Ecuaţiile parametrice ale evolutei sunt:

$$\begin{cases} X=x-\frac{\dot{y}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)}{\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}} \\ Y=y+\frac{\dot{x}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)}{\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}} \end{cases},$$

dacă curba este dată prin ecuaţiile parametrice şi:

$$\begin{cases} X=x-\frac{y'(1+y'^2)}{y''} \\ Y=y+\frac{1+y'^2}{y''} \end{cases},$$

dacă curba dată prin ecuaţia carteziană explicită.

In cazul problemei avem:

$$a)\ \begin{cases} X = -\dfrac{x^3}{4} \\ Y = \dfrac{3x^2+8}{4} \end{cases};\quad b)\ \begin{cases} X = a(t+\sin t) \\ Y = -a(1-\cos t) \end{cases},\ \text{(tot o cicloidă)}.$$

3. Să se afle înfăşurătoarea următoarelor familii de drepte, unde λ este parametru variabil:

a) $y = \lambda x + \dfrac{p}{2\lambda}$, $\lambda \neq 0$;

b) $\lambda^2 x - (\lambda - 1)y + 2 = 0$;

c) $y = \lambda x + \lambda^2$;

d) $\lambda^2(x-a) - \lambda y - a = 0$.

Răspuns: a) $y^2 = 2px$; b) $4xy - y^2 + 8x = 0$;
c) $y = -\dfrac{x^2}{4}$; d) $y^2 + 4a(x-a) = 0$.

4. Să se afle înfăşurătoarea următoarelor familii de cercuri:

a) $(x-\lambda)^2 + y^2 = 1$;

b) $x^2 + y^2 - 2\lambda x + \dfrac{3}{4}\lambda^2 = 0$;

c) $x^2 + y^2 - 2\lambda x + \lambda^2 - 4\lambda = 0$.

Răspuns: a) $y = 1$ şi $y = -1$; b) $y = \pm\dfrac{x}{\sqrt{3}}$; c) $y^2 - 4x - 4 = 0$.

5. Să se afle înfăşurătoarea familiei de curbe:

$$\left(\lambda^2 x + 1\right)x - 2\lambda y - 1 = 0.$$

Răspuns: $y^2 = x^2(x-1)$.

6. Să se afle înfăşurătoarea cercurilor care au centrul pe o parabolă şi trec prin vârful ei.
Răspuns: $x^3 + (p+x)y^2 = 0$, dacă se consideră parabola $y^2=2px$.

7. Să se afle înfăşurătoarea familiei de cercuri cu centrele pe parabola $y = x^2$ şi tangente axei absciselor.
Răspuns: $4x^2y^2 + y^2(1-2y)^2 - 2x^2y = 0$.

8. Fie un punct $F(a,0)$ fix pe Ox şi un punct M mobil pe Oy. Să se afle înfăşurătoarea perpendicularelor ridicate în M pe MF.
Răspuns: $y^2 = 4ax$.

9. Să se afle înfăşurătoarea familiei de cercuri cu centrele pe parabola $y^2 = 4x$ şi trecând prin punctul fix $(1,0)$ al axei de simetrie.
Răspuns: $(1-x)(x^2+y^2-1) - 2y^2 = 0$.

10. Un segment AB de lungime constantă k se deplasează în plan, capătul A alunecând pe Ox şi capătul B pe Oy. Să se afle înfăşurătoarea dreptelor ce includ aceste segmente.

Răspuns: $x = k\cos^3\alpha$; $y = k\sin^3\alpha$ sau $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = k^{\frac{2}{3}}$ (astroida).

11. Fie un punct mobil M pe dreapta $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{4} - 1 = 0$ şi N şi respectiv P proiecţiile sale pe Ox şi Oy. Să se afle înfăşurătoarea dreptelor NP.
Răspuns: $4x^2 - 4xy + y^2 - 16x - 8y + 16 = 0$.

12. Se consideră dreptele (d_1): $x = a$ şi (d_2): $x = -a$. Se duc prin origine două drepte variabile (D_1) şi (D_2) perpendiculare între ele. Dreptele (d_1) şi (D_1) se întâlnesc în M_1, iar dreptele (d_2) şi (D_2) se întâlnesc în M_2. Să se afle înfăşurătoarea dreptelor M_1M_2.

Răspuns: (D_1): $y = -\dfrac{1}{\lambda}x$, (D_2): $y = \lambda x$ iar înfăşurătoarea este cercul $x^2 + y^2 = a^2$.

13. Fie cercul $x^2 + y^2 = R^2$ şi două puncte M şi M′ situate pe acest cerc şi simetrice în raport cu Ox. Să se afle înfăşurătoarea cercurilor având un diametru de tip MM′.

Răspuns: $\dfrac{x^2}{2R^2} + \dfrac{y^2}{R^2} - 1 = 0$ (elipsă).

14. Să se găsească înfăşurătoarea cercurilor cu centrele pe hiperbola $x^2 - y^2 = a^2$ şi care trec prin originea axelor.
Răspuns: Ecuaţiile parametrice ale hiperbolei sunt: $x = a\,\mathrm{ch}\,t$; $y = a\,\mathrm{sh}\,t$ iar ecuaţia înfăşurătoarei: $(x^2+y^2)^2 - 4a^2(x^2-y^2) = 0$ (lemniscata Bernoulli).

15. Se dau conica: $x^2 + 2xy + 3y^2 + 2x + 4y = 0$ şi punctul $M\left(\lambda, \dfrac{1}{\lambda}\right)$.

a) Să se scrie ecuaţia polarei punctului M în raport cu conica;
b) Să se afle înfăşurătoarea polarelor când λ variază;
c) Să se arate că înfăşurătoarea este tangentă dreptelor $x + y + 1 = 0$, $x + 3y + 2 = 0$ în punctele T_1 şi T_2;
d) Să se arate că polul dreptei T_1T_2 faţă de înfăşurătoare este centrul conicei date.

Răspuns:
a) $\lambda^2(x+y+1) + \lambda(x+2y) + x + 3y + 2 = 0$;
b) $4(x+y+1)(x+3y+2) - (x+2y)^2 = 0$;
c) $T_1(-2,1)$, $T_2(4,-2)$;
d) Polul dreptei T_1T_2 este $\left(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$.

16. Să se afle evoluta curbelor:

a) $y = x^2$,

b) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ (elipsă);

c) $y = a\,\mathrm{ch}\,\dfrac{x}{a}$ (lănţişorul);

d) $\begin{cases} x = R(\cos t + t\sin t) \\ y = R(\sin t - t\cos t) \end{cases}$.

Răspuns: a) $Y = \dfrac{1}{2} + 3\sqrt[3]{\dfrac{X^2}{16}}$; b) $\begin{cases} X = \dfrac{a^2 - b^2}{a}\cos^3 t \\ Y = \dfrac{b^2 - a^2}{b}\sin^3 t \end{cases}$;

c) $\begin{cases} X = x - a\,\mathrm{ch}\dfrac{x}{a}\,\mathrm{sh}\dfrac{x}{a} \\ Y = 2a\,\mathrm{ch}\dfrac{x}{a} \end{cases}$; d) $\begin{cases} X = R\cos t \\ Y = R\sin t \end{cases}$ sau $X^2 + Y^2 = R^2$.

CAPITOLUL X

ELEMENTE DE GEOMETRIE DIFERENŢIALĂ A CURBELOR ÎN SPAŢIU

O curbă C din spaţiul euclidian $\mathbf{R}^3$ poate fi dată printr-o:

a) *reprezentare parametrică* $r: I \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$ de clasă $\mathbf{C}^1(I)$, $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Corespunzător acestei reprezentări avem:

<u>ecuaţiile parametrice</u> $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t); \\ z = z(t) \end{cases}$

<u>ecuaţia vectorială</u> : $\bar{r} = \bar{r}(t) = x(t)\bar{i} + y(t)\bar{j} + z(t)\bar{k}$.

b) *reprezentare implicită* $C = \{(x,y,z) \in D \subset \mathbf{R}^3 / F(x,y,z) = 0, G(x,y,z) = 0\}$,

$F: D \to \mathbf{R}$, $G: D \to \mathbf{R}$ de clasă $\mathbf{C}^1(D)$ şi matricea jacobiană $\begin{pmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial x} & \dfrac{\partial F}{\partial y} & \dfrac{\partial F}{\partial z} \\ \dfrac{\partial G}{\partial x} & \dfrac{\partial G}{\partial y} & \dfrac{\partial G}{\partial z} \end{pmatrix}$ are rangul 2

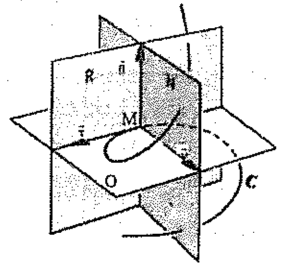
în fiecare punct din C. În acest caz avem :

<u>ecuaţiile implicite</u> $\begin{cases} F(x,y,z) = 0 \\ G(x,y,z) = 0 \end{cases}$.

Fie $\bar{r} = \bar{r}(t) = x(t)\bar{i} + y(t)\bar{j} + z(t)\bar{k}$, $\bar{r} \in C^2(I), \bar{r}'(t) \times \bar{r}''(t) \neq \bar{0}, \forall t \in I$, o curbă şi $M(x,y,z)$ (uneori cum x,y,z depind de parametrul t vom scrie prescurtat M(t)), un *punct nesingular* (adică $\bar{r}'(t) \neq 0$). Ataşăm curbei în M un triedru format din trei plane perpendiculare două câte două. Acest triedru se numeşte *triedrul lui Frenet* (Fig. 1).

<u>Versorii triedrului Frenet în M(t) sunt</u> :

- $\bar{\tau}(t) = \dfrac{\bar{r}'(t)}{\|\bar{r}'(t)\|}$, <u>*versorul tangentei*</u>;
- $\bar{\beta}(t) = \dfrac{\bar{r}'(t) \times \bar{r}''(t)}{\|\bar{r}'(t) \times \bar{r}''(t)\|}$, <u>*versorul binormalei*</u>;
- $\bar{\nu}(t) = \bar{\beta}(t) \times \bar{\tau}(t)$, <u>*versorul normalei principale*</u>.



Ecuaţiile <u>*muchiilor triedrului Frenet*</u> în M(t) sunt:

- <u>*tangenta*</u>: $\dfrac{x - x(t)}{x'(t)} = \dfrac{y - y(t)}{y'(t)} = \dfrac{z - z(t)}{z'(t)}$;
- <u>*binormala*</u>: $\dfrac{x - x(t)}{A(t)} = \dfrac{y - y(t)}{B(t)} = \dfrac{z - z(t)}{C(t)}$, unde:

Fig. 1

$A(t) = \begin{vmatrix} y'(t) & z'(t) \\ y''(t) & z''(t) \end{vmatrix}$, $B(t) = -\begin{vmatrix} x'(t) & z'(t) \\ x''(t) & z''(t) \end{vmatrix}$, $C(t) = \begin{vmatrix} x'(t) & y'(t) \\ x''(t) & y''(t) \end{vmatrix}$;

- *normala principală*: $\frac{x-x(t)}{l(t)}=\frac{y-y(t)}{m(t)}=\frac{z-z(t)}{n(t)}$, unde:

$$l(t)=\begin{vmatrix} B(t) & C(t)\\ y'(t) & z'(t)\end{vmatrix},\qquad m(t)=-\begin{vmatrix} A(t) & C(t)\\ x'(t) & z'(t)\end{vmatrix},\qquad n(t)=\begin{vmatrix} A(t) & B(t)\\ x'(t) & y'(t)\end{vmatrix}.$$

Ecuațiile *fețelor triedrului Frenet* în M(t) sunt:

- *planul normal* : $x'(t)(x-x(t))+y'(t)(y-y(t))+z'(t)(z-z(t))=0$ (N din fig. 1);
- *planul osculator* : $A(t)(x-x(t))+B(t)(y-y(t))+C(t)(z-z(t))=0$ (O din fig. 1);
- *planul rectificant* : $l(t)(x-x(t))+m(t)(y-y(t))+n(t)(z-z(t))=0$ (R din fig. 1).

Expresia *elementului de arc* pentru curbă este $ds=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\,dt$.

Fie $\bar{r}=\bar{r}(s)$ o curbă parametrizată canonic ($\|\bar{r}'(s)\|=1$). *Curbura* într-un punct nesingular al acestei curbe este dată de expresia $K(s)=\lim\limits_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|$, unde $\Delta\alpha$ este unghiul dintre direcțiile tangentelor în două puncte apropiate, iar Δs este arcul de curbă între cele două puncte(fig. 2). Curbura este o măsură a devierii formei curbei față de o dreaptă.

Dacă curba are reprezentarea $\bar{r}=\bar{r}(t)=x(t)\bar{i}+y(t)\bar{j}+z(t)\bar{k}$, atunci

$$K(t)=\frac{\|\bar{r}'(t)\times\bar{r}''(t)\|}{\|\bar{r}'(t)\|^3}.$$

Inversul curburii se numește *rază de curbură*

$$R(t)=\frac{1}{K(t)}.$$

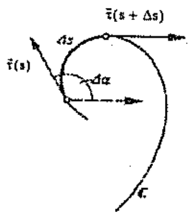


Fig. 2

Torsiunea într-un punct nesingular este dată de expresia $T(s)=\lim\limits_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\beta}{\Delta s}\right|$, unde $\Delta\beta$ este unghiul dintre direcțiile binormalelor în două puncte apropiate iar Δs este arcul de curbă între cele două puncte .Torsiunea este o măsură a variației planului osculator sau o măsură a deviației curbei de la proiecția sa pe planul osculator întru-un punct al curbei.

Dacă curba are reprezentarea $\bar{r}=\bar{r}(t)=x(t)\bar{i}+y(t)\bar{j}+z(t)\bar{k}, \bar{r}\in C^3(I)$, atunci:

$$T(t)=\frac{(\bar{r}'(t),\bar{r}''(t),\bar{r}'''(t))}{\|\bar{r}'(t)\times\bar{r}''(t)\|^2}.$$

Inversul torsiunii se numește *rază de torsiune*: $\rho(t)=\frac{1}{T(t)}$.

Formulele lui Frenet, asociate unei curbe parametrizate canonic, într-un punct nesingular, sunt :

$$\begin{cases}\frac{d\bar{\tau}(s)}{ds}= & K(s)\bar{\nu}(s) & \\ \frac{d\bar{\nu}(s)}{ds}=-K(s)\bar{\tau} & & +T(s)\bar{\beta}.\\ \frac{d\bar{\beta}(s)}{ds}= & -T(s)\bar{\nu}(s) & \end{cases}$$

1. Să se determine versorii triedrului Frenet atașat curbelor de mai jos, în punctele precizate:

a) $r(t)=(e^t, e^{-t}, \sqrt{2}\,t)$, în punctul M(t=0);

b) $\bar{r}=\bar{r}(t)=t\bar{i}+t^2\bar{j}+\frac{2t^3}{3}\bar{k}$, în punctul M(t=1);

c) $\begin{cases}x(t)=1-\cos t\\ y(t)=\sin t\\ z(t)=t\end{cases}$, în punctul M(t=$\frac{\pi}{2}$);

d) $\begin{cases}x^3-y^2+z+6=0\\ x-y^2+z^3+6=0\end{cases}$, în punctul M(-1,-2,-1);

e) $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=6\\ x+y+z=0\end{cases}$, în punctul M(1,1,-2).

Soluție: a) $r'(t)=(e^t,-e^{-t},\sqrt{2})$, $r'(0)=(1,-1,\sqrt{2})$, $\|\bar{r}'(0)\|=2$, deci avem

$\bar{\tau}(0)=\frac{\bar{r}'(0)}{\|\bar{r}'(0)\|}=\frac{1}{2}\bar{i}-\frac{1}{2}\bar{j}+\frac{\sqrt{2}}{2}\bar{k}$ versorul tangentei în M(t=0),

$r''(t)=(e^t,e^{-t},0)$, $r''(0)=(1,1,0)$; $\bar{r}'(0)\times\bar{r}''(0)=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 1 & -1 & \sqrt{2}\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix}=-\sqrt{2}\,\bar{i}+\sqrt{2}\,\bar{j}+2\bar{k}$;

$\|\bar{r}'(0)\times\bar{r}''(0)\|=2\sqrt{2}$, deci avem $\bar{\beta}(0)=\frac{\bar{r}'(0)\times\bar{r}''(0)}{\|\bar{r}'(0)\times\bar{r}''(0)\|}=-\frac{1}{2}\bar{i}+\frac{1}{2}\bar{j}+\frac{\sqrt{2}}{2}\bar{k}$ versorul binormalei în M(t=0);

$\bar{\nu}(0)=\bar{\beta}(0)\times\bar{\tau}(0)=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{vmatrix}=\frac{\sqrt{2}}{2}\bar{i}+\frac{\sqrt{2}}{2}\bar{j}$ versorul normalei principale în M(t=0).

d) Vom considera pentru curbă parametrizarea: x=t,y=y(t),z=z(t) funcțiile y(t),z(t) fiind date implicit de $\begin{cases}t^3-y^2+z+6=0\\ t-y^2+z^3+6=0\end{cases}$. Derivăm sistemul în raport cu t și obținem $\begin{cases}3t^2-2yy'+z'=0\\ 1-2yy'+3z^2z'=0\end{cases}$, care în punctul M(-1,-2,-1), devine $\begin{cases}3+4y'(-1)+z'(-1)=0\\ 1+4y'(-1)+3z'(-1)=0\end{cases}$.

Rezolvând acest sistem obținem $y'(-1)=-1$, $z'(-1)=1$ și cum $x'(-1)=1$ rezultă $r'(-1)=(1,-1,1)$. Deci $\bar{\tau}(-1)=\frac{1}{\sqrt{3}}(\bar{i}-\bar{j}+\bar{k})$ versorul tangentei în M(-1,-2,-1).

Pentru a afla $\bar{\beta}(-1), \bar{\nu}(-1)$ va trebui să mai derivăm încă o dată sistemul :

$$\begin{cases} 6t - 2(y')^2 - 2yy'' + z'' = 0 \\ -2(y')^2 - 2yy'' + 6z(z')^2 + 3z^2 z'' = 0 \end{cases}, \text{ care în M devine } \begin{cases} -8 + 4y''(-1) + z''(-1) = 0 \\ -8 + 4y''(-1) + 3z''(-1) = 0 \end{cases}.$$

Soluțiile acestui sistem sunt y''(-1)=2,z''(-1)=0 și cum x''(-1)=0 obținem r''(-1) = =(0,2,0). Deci $\bar{\beta}(-1) = \frac{\sqrt{2}}{2}(-\bar{i} + \bar{k})$ este versorul binormalei în M(-1,-2,-1) iar

$\bar{\nu}(-1) = \frac{\sqrt{6}}{6}(\bar{i} + 2\bar{j} + \bar{k})$ versorul normalei principale.

Răspuns. b) Se obține: $\bar{r}'(t) = \bar{i} + 2t\bar{j} + 2t^2\bar{k}$, $\bar{r}'(1) = \bar{i} + 2\bar{j} + 2\bar{k}$, $\bar{r}''(t) = 2\bar{j} + 4t\bar{k}$,

$\bar{r}''(1) = 2\bar{j} + 4\bar{k}$, $\bar{\tau}(1) = \frac{\bar{r}'(1)}{\|\bar{r}'(1)\|} = \frac{1}{3}\bar{i} + \frac{2}{3}\bar{j} + \frac{2}{3}\bar{k}$, versorul tangentei în M(t=1),

$\bar{\beta}(1) = \frac{\bar{r}'(1) \times \bar{r}''(1)}{\|\bar{r}'(1) \times \bar{r}''(1)\|} = \frac{2}{3}\bar{i} - \frac{2}{3}\bar{j} + \frac{1}{3}\bar{k}$ versorul binormalei și $\bar{\nu}(1) = \bar{\beta}(1) \times \bar{\tau}(1) =$

$-\frac{2}{3}\bar{i} - \frac{1}{3}\bar{j} + \frac{2}{3}\bar{k}$ versorul normalei principale.

c) r'(t)=(sin t,cos t,1), r'($\frac{\pi}{2}$)=(1,0,1), r''(t)=(cos t,-sin t,0), r''($\frac{\pi}{2}$)=(0,-1,0),

$\bar{\tau}(\frac{\pi}{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\bar{i} + \bar{k})$, $\bar{\beta}(\frac{\pi}{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\bar{i} - \bar{k})$, $\bar{\nu}(\frac{\pi}{2}) = -\bar{j}$.

e) Obținem : x'(1)=1, y'(1)=-1, z'(1)=0, x''(1)=0, y''(1)=$-\frac{2}{3}$, z''(1) = $\frac{2}{3}$.

De aici rezultă $\bar{\tau}(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{i} - \bar{j})$, este versorul tangentei în M(1,1,-2), $\bar{\beta}(-1) =$

$\frac{\sqrt{3}}{3}(-\bar{i} - \bar{j} - \bar{k})$ versorul binormalei iar $\bar{\nu}(1) = \frac{\sqrt{6}}{6}(-\bar{i} - \bar{j} + 2\bar{k})$ versorul normalei principale.

2. Să se scrie ecuațiile muchiilor și fețelor triedrului Frenet atașat curbelor de mai jos, în punctele precizate:

a) $\begin{cases} x(t) = \frac{t^2}{2} \\ y(t) = \frac{2t^3}{3} \\ z(t) = \frac{t^4}{2} \end{cases}$, în punctul M($\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}$);

b) r(t)=(t,-t,$\frac{t^2}{2}$), în punctul M(t=2);

c) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9 \\ x^2 - y^2 = 3 \end{cases}$, în punctul M(2,1,2);

d) $\begin{cases} y = x^2 \\ z = 2x \end{cases}$, în punctul M(2,4,4).

Soluție: a) (x'(1),y'(1),z'(1))=(1,2,2), (x''(1),y''(1),z''(1))=(1,4,6);

A(1)=$\begin{vmatrix} y'(1) & z'(1) \\ y''(1) & z''(1) \end{vmatrix}$=4 ; B(1)= $-\begin{vmatrix} x'(1) & z'(1) \\ x''(1) & z''(1) \end{vmatrix}$=-4 ; C(1)= $\begin{vmatrix} x'(1) & y'(1) \\ x''(1) & y''(1) \end{vmatrix}$=2;

l(1)= $\begin{vmatrix} B(1) & C(1) \\ y'(1) & z'(1) \end{vmatrix}$=-12 ; m(1)= $-\begin{vmatrix} A(1) & C(1) \\ x'(1) & z'(1) \end{vmatrix}$=-6 ; n(1)= $\begin{vmatrix} A(1) & B(1) \\ x'(1) & y'(1) \end{vmatrix}$=12.

Obținem astfel în punctul M(t=1) ecuațiile tangentei: $\frac{x-\frac{1}{2}}{1} = \frac{y-\frac{2}{3}}{2} = \frac{z-\frac{1}{2}}{2}$,

ecuațiile binormalei: $\frac{x-\frac{1}{2}}{2} = \frac{y-\frac{2}{3}}{-2} = \frac{z-\frac{1}{2}}{1}$, ecuațiile normalei principale: $\frac{x-\frac{1}{2}}{2} =$;

$\frac{y-\frac{2}{3}}{1} = \frac{z-\frac{1}{2}}{-2}$, ecuația planului normal: (x-$\frac{1}{2}$)+2(y-$\frac{2}{3}$)+2(z-$\frac{1}{2}$)=0 sau 6x+12y+12z-17 = 0, ecuația planului osculator: 2(x-$\frac{1}{2}$) - 2(y-$\frac{2}{3}$) + (z-$\frac{1}{2}$)=0 sau 12x-12y+6z-1=0,

ecuația planului rectificant: 2(x-$\frac{1}{2}$)+(y-$\frac{2}{3}$)-2(z-$\frac{1}{2}$)=0 sau 6x+3y-6z-2=0.

e) Procedăm ca la punctul d) din exercițiul.1, considerînd parametrizarea curbei date, astfel: x=t, y=y(t), z=z(t) și $\begin{cases} t^2 + y^2 + z^2 = 9 \\ t^2 - y^2 = 3 \end{cases}$. După ce derivăm și scriem sistemele respective în M(2,1,2) obținem: x'(2)=1, y'(2)=2, z'(2)=-2, x''(2)=0, y''(2)=-3, z''(2)=-3, ecuațiile tangentei: $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{-2}$, ecuațiile binormalei: $\frac{x-2}{-4} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{-1}$, ecuațiile normalei principale: $\frac{x-2}{0} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{1}$, ecuația planului normal: (x-2)+2(y-1)-2(z-2) = 0 sau x+ 2y- 2z = 0, ecuația planului osculator: -4(x-2)+(y-1)-(z-2)=0 sau 4x-y+z-9=0, ecuația planului rectifiant: (y-1)+(z-2)=0 sau y+z-3=0.

Răspuns: b) ecuațiile tangentei: $\frac{x-2}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-2}{2}$, ecuațiile binormalei:

$\frac{x-2}{-1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-2}{0}$, ecuațiile normalei principale: $\frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-2}{-2}$,

ecuația planului normal: (x-2)-(y+2)+2(z-2)=0 sau x-y+2z-8=0, ecuația

planului osculator: (x-2)+(y+2)=0 sau x+y=0, ecuaţia planului rectificant:

(x-2)-(y+2)-(z-2)=0 sau x-y-z-2=0.

d) Analog ca la punctul c) se obţin: ecuaţiile tangentei: $\frac{x-2}{1}=\frac{y-4}{4}$ $=\frac{z-4}{2}$, ecuaţiile binormalei: $\frac{x-2}{-2}=\frac{y-4}{0}=\frac{z-4}{1}$, ecuaţiile normalei principale: $\frac{x-2}{4}=\frac{y-4}{-5}=\frac{z-4}{8}$, ecuaţia planului normal: x+4y+2z-26=0, ecuaţia planului osculator: 2x - z = 0 şi ecuaţia planului rectificant: 4x-5y+8z-20=0.

3. Găsiţi sfera pe care se află, curba de ecuaţie vectorială:

$$\bar{r}=\frac{t}{1+t^2+t^4}\bar{i}+\frac{t^2}{1+t^2+t^4}\bar{j}+\frac{t^3}{1+t^2+t^4}\bar{k}.$$

Răspuns: Sfera de ecuaţie $x^2+y^2+z^2-y=0$,cu centrul în $A(0,\frac{1}{2},0)$ şi de rază $\frac{1}{2}$.

4. a) Să se scrie sub formă parametrică ecuaţia curbei lui Viviani, determinată de intersecţia sferei $x^2+y^2+z^2=a^2$ cu cilindrul $x^2+y^2-ax=0$, a>0.

b) Să se demonstreze că proiecţia curbei pe planul xOz este o parabolă.

Soluţie: a) Va trebui să parametrizăm curba $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=a^2\\ x^2+y^2-ax=0\end{cases}$. Fie $M(\rho,\theta,z)$ un punct de pe această curbă astfel încât $\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\ y=\rho\sin\theta\\ z=z\end{cases}$ şi punând condiţia să verifice ecuaţiile curbei obţinem parametrizarea $\begin{cases}x=a\cos^2\theta\\ y=a\sin\theta\cos\theta\\ z=a\sin\theta\end{cases}$; θ este parametrul curbei.

b) Pentru a determina proiecţia pe planul xOz va trebui să facem y=0 în ecuaţiile anterioare şi după ce eliminăm parametrul θ vom obţine ecuaţiile parabolei:

$$\begin{cases}z^2+ax-a^2=0\\ y=0\end{cases}.$$

5. Fie I un interval, $\bar{r}(t)$ vectorul de poziţie al unui punct în mişcare şi $\bar{r}'(t)$ vectorul viteză. Să se determine: a) condiţia ca cei doi vectori să fie perpendiculari; b)condiţia ca cei doi vectori să fie coliniari.

Soluţie: a) Din condiţia de perpendicularitate a celor doi vectori: $\bar{r}(t)=x(t)\bar{i}+y(t)\bar{j}+z(t)\bar{k}$ şi $\bar{r}'(t)=x'(t)\bar{i}+y'(t)\bar{j}+z'(t)\bar{k}$ rezultă x(t)x'(t)+y(t)y'(t)+z(t)z'(t)=0, care prin

integrare duce la $x^2(t)+y^2(t)+z^2(t)=k=$const. Deci, în acest caz punctul se mişcă pe o sferă.

b) Din condiţia de coliniaritate a celor doi vectori rezultă $x'(t)=\lambda(t)\,x(t)$, $y'(t)=\lambda(t)\,y(t)$, $z'(t)=\lambda(t)\,z(t)$, care prin integrare duce la: $x(t)=a\,e^{\int\lambda(t)\,dt}$, $y(t)=b\,e^{\int\lambda(t)\,dt}$, $z(t)=ce^{\int\lambda(t)\,dt}$. Deci, în acest caz, punctul se mişcă pe o dreaptă.

6. Să se determine elementul de arc al curbelor următoare:

a) r(t)=(a cht cost,a cht sint,at) , $t\in\mathbf{R}$, a>0;

b) $\bar{r}(t)=\frac{t^4}{4}\bar{i}+\frac{t^3}{3}\bar{j}+\frac{t^2}{2}\bar{k}$, $t\in\mathbf{R}$;

c) $\begin{cases}x=t\cos t\\ y=t\sin t\\ z=\frac{t^2}{2}\end{cases}$, $t\in\mathbf{R}$.

Răspuns. Elementul de arc se calculează cu formula:

$$ds=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\,dt.$$

a) $ds=\sqrt{2}\,a(\text{ch}t)\,dt$; b) $ds=|t|\sqrt{1+t^2+t^4}\,dt$; c) $ds=\sqrt{1+2t^2}\,dt$.

7. Să se găsească lungimea arcului curbei $\begin{cases}y=\frac{x^2}{2a}\\ z=\frac{x^3}{6a^2}\end{cases}$, cuprins între origine şi punctul M de abscisă 2.

Răspuns: $ds=(1+\frac{x^2}{2a^2})dx$. Lungimea este $\int_0^2(1+\frac{x^2}{2a^2})dx=2+\frac{4}{3a^2}$.

8. Se consideră curba $\begin{cases}x=e^t\cos t\\ y=e^t\sin t\\ z=e^t\end{cases}$, $t\in\mathbf{R}$. Să se arate că această curbă este situată pe un con şi să se determine lungimea arcului cuprins între punctele $M_1(1,0,1)$ şi

$M_2(0,e^{\frac{\pi}{2}},e^{\frac{\pi}{2}})$.

Soluţie: Curba este situată pe conul cu vîrful în origine: $x^2+y^2=z^2$. Elementul de arc este $ds=\sqrt{3}e^t dt$, iar cele două puncte corespund la $t_1=0$, $t_2=\frac{\pi}{2}$. Se obţine lungimea

$L=\sqrt{3}(e^{\frac{\pi}{2}}-1)$.

9. Să se determine tangentele la curba $\bar{r}(t)=\frac{t^4}{4}\bar{i}+\frac{t^3}{3}\bar{j}+\frac{t^2}{2}\bar{k}$, t>0 care sunt paralele cu planul x+3y +2z=0.

Răspuns: Parametrii directori ai tangentei într-un punct oarecare M(t) la această

curbă se pot considera $(t^2,t,1)$ iar ecuaţiile tangentelor paralele cu planul dat sunt:

$$\frac{x-4}{4}=\frac{3y+8}{-6}=\frac{z-2}{1} \quad \text{şi} \quad \frac{4x-1}{4}=\frac{3y+1}{-3}=\frac{2z-1}{2}.$$

10. Să se găsească o parametrizare pentru curba $\begin{cases} x=y^2 \\ z=x^2 \end{cases}$ şi să se scrie ecuaţia planului osculator şi a binormalei în punctul $M(1,1,1)$.

Răspuns: Ecuaţia planului osculator este: $6x-8y-z+3=0$ iar ecuaţiile binormalei

sunt: $\frac{x-1}{6}=\frac{y-1}{-8}=\frac{z-1}{-1}$.

11. Să se găsească punctele curbei $\begin{cases} x(t)=2t-1 \\ y(t)=t^3 \\ z(t)=1-t^2 \end{cases}$ în care planele osculatoare sunt perpendiculare pe planul $7x-12y+5z+3=0$.

Răspuns: $M_1(-5,-8,-3)$, $M_2(1/7, 64/343, 33/49)$.

12. Să se scrie ecuaţia planului normal curbei $\begin{cases} x^2+y^2-z^2=1 \\ x^2-y^2-z^2=-1 \end{cases}$, în punctul $M(1,1,1)$.

Răspuns: Ecuaţia planului normal este: $x+z-2=0$. Menţionăm că în acest caz în reprezentarea parametrică locală (într-o vecinătate a punctului M) avem în M, $\bar{r}' \times \bar{r}'' = \bar{0}$ (curba este o reuniune de drepte) dar planul normal este bine definit.

13. Să se arate că tangenta, binormala şi normala principală în orice punct al curbei

$\bar{r}(t)=e^t\cos t\,\bar{i}+e^t\sin t\,\bar{j}+e^t\,\bar{k}$ formează fiecare cu axa Oz un unghi constant.

Răspuns: Fie α, β şi respectiv γ unghiurile formate de cele trei drepte cu axa Oz.

Atunci $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\cos\beta=\frac{\sqrt{6}}{3}$ şi respectiv $\cos\gamma=0$.

14. Fie curba $r(t)\begin{cases} x=a\cos t \\ y=a\sin t \\ z=bt \end{cases}$.   a, b > 0

a) Să se arate că această curbă se află pe un cilindru drept;

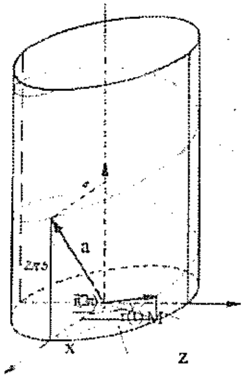
b) Să se scrie ecuaţiile normalei principale şi a planului rectificant, într-un punct oarecare M(t) al curbei;

c) Să se arate că în orice punct al curbei, tangenta, binormala şi normala principală fac un unghi constant cu Oz;

d) Planul normal şi planul osculator într-un punct oarecare al curbei, taie axa Oz în acelaşi punct P;

e) Planul rectificator într-un punct M(t), se confundă cu planul tangent la cilindru pe care se află curba, de-a lungul generatoarei ce trece prin M.

Această curbă se numeşte *elice circulară* ; *pasul elicei* este $2\pi b$=const.



Soluţie: a) $x^2+y^2=a^2$; b) ecuaţiile normalei principale sunt: $\frac{x-a\cos t}{\cos t}=\frac{y-a\sin t}{\sin t}=\frac{z-bt}{0}$, ecuaţia planului rectificant este: $\cos t(x-a\cos t)+\sin t(y-a\sin t)=0$, deci $x\cos t+y\sin t-a^2=0$; c) $\cos\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, α este unghiul dintre tangentă şi axa Oz, $\cos\beta=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$

β este unghiul dintre binormală şi axa Oz , $\cos\gamma=0$, γ este unghiul dintre normala principală şi axa Oz;

d) Planul normal $-a\sin t\, x+a\cos t\, y+bz-b^2t=0$, taie axa Oz în punctul $(0,0,bt)$, pe care îl notăm P. Planul osculator $b\sin t\, x-b\cos t\, y+az-abt=0$, taie axa Oz în $(0,0,bt)$, deci tot în P;

e) Normala principală a elicei (intersecţia dintre planul normal şi planul osculator) este MP, P fiind proiecţia lui M pe axa Oz. Deci binormala e situată în planul tangent la cilindru în lungul generatoarei.

15. Să se arate că tangentele la curba $\begin{cases} x=a(\sin t+\cos t) \\ y=a(\sin t-\cos t) \\ z=be^{-t} \end{cases}$, intersectează planul xOy după cercul $x^2+y^2=4a^2$.

Soluţie: Ecuaţiile tangentei, într-un punct oarecare al curbei sunt:

$$\frac{x-a(\sin t+\cos t)}{a(\cos t-\sin t)}=\frac{y-a(\sin t-\cos t)}{a(\cos t+\sin t)}=\frac{z-be^{-t}}{-be^{-t}}.$$

Intersectăm cu planul xOy (z=0) şi obţinem cercul căutat.

16. Să se scrie ecuaţia planului osculator al curbei $\begin{cases} x^2+2y^2-z^2=8 \\ 2x^3+z^2=3 \end{cases}$, în punctul $M(1,2,1)$.

Răspuns: $11x+20y-3z-48=0$.

17. Fie curba $\bar{r}(t)=t\bar{i}+\sin t\,\bar{j}+(6-\cos t)\bar{k}$. Să se arate că normala principală într-un punct oarecare este paralelă cu planul yOz.

Răspuns: $\bar{v}(t)=-\sin t\,\bar{j}+\cos t\,\bar{k}$.

18. Să se calculeze curbura, raza de curbură, torsiunea şi raza de torsiune pentru curbele:

a) $x=t$, $y=t^2$, $z=\frac{2t^3}{3}$, în punctele $M_1(t=0)$, $M_2(t=1)$;

b) $x=2t^3-3t^2+1$, $y=3(t^2-1)$, $z=3(t-1)^2$, în punctul $M(t=1)$;

c) $x=2\cos t$, $y=2\sin t$, $z=e^t+e^{-t}$, într-un punct oarecare $M(t)$;

d) $\begin{cases} x = a\,\mathrm{ch}\dfrac{t}{a} \\ y = a\,\mathrm{sh}\dfrac{t}{a} \\ z = t \end{cases}$, într-un punct oarecare M(t).

Soluție: a) $\vec r\,'(t) = \vec i + 2t\vec j + 2t^2\vec k$, $\|\vec r\,'(t)\| = 2t^2 + 1$, $\vec r\,''(t) = 2\vec j + 4t\vec k$, $\vec r\,'''(t) = 4\vec k$,

$$\vec r\,'(t) \times \vec r\,''(t) = \begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ 1 & 2t & 2t^2 \\ 0 & 2 & 4t \end{vmatrix} = 4t^2\vec i - 4t\vec j + 2\vec k,\ \|\vec r\,'(t) \times \vec r\,''(t)\| = 2(2t^2+1);$$

$(\vec r\,'(t), \vec r\,''(t), \vec r\,'''(t)) = 8$, $\quad K(t) = \dfrac{\|\vec r\,'(t) \times \vec r\,''(t)\|}{\|\vec r\,'(t)\|^3} = \dfrac{2}{(2t^2+1)^2}$, $\quad R(t) = \dfrac{1}{K(t)}$,

$T(t) = \dfrac{(\vec r\,'(t), \vec r\,''(t), \vec r\,'''(t))}{\|\vec r\,'(t) \times \vec r\,''(t)\|^2} = \dfrac{2}{(2t^2+1)^2}$, $\rho(t) = \dfrac{1}{T(t)}$. Deci $K(0)=2$, $R(0)=\dfrac{1}{2}$, $T(0)=2$,
$\rho(0)=\dfrac{1}{2}$; $K(1)=\dfrac{2}{9}$, $R(1)=\dfrac{9}{2}$, $T(1)=\dfrac{2}{9}$, $\rho(1)=\dfrac{9}{2}$.

Răspuns. b) $K(1)=\dfrac{\sqrt{2}}{36}$, $R(1) = 18\sqrt{2}$, $T(1) = 6$, $\rho(1) = \dfrac{1}{6}$;

c) $K(t)=\dfrac{2\sqrt{2}}{(e^t + e^{-t})^2}$, $T(t)=\dfrac{(e^t - e^{-t})}{(e^t + e^{-t})^2}$;

d) $K(t)=\dfrac{1}{2a\,\mathrm{ch}^2\dfrac{t}{a}}$, $T(t)=\dfrac{1}{2a\,\mathrm{ch}^2\dfrac{t}{a}}$.

19. Calculați raza de curbură, pentru curbele următoare, în punctele indicate:

a) $\begin{cases} x^2 - y^2 + z^2 = 1 \\ y^2 - 2x + z = 0 \end{cases}$, în punctul M(1,1,1);

b) $\begin{cases} x^2 + y^2 - a^2 = 0 \\ x^2 - 2yz \ \ = 0 \end{cases}$, în punctul M(0,a,0), $a \neq 0$.

Soluție: a) Se procedează ca la exercițiul 1 d), considerându-se parametrizarea $x=t$, $y=y(t)$, $z=z(t)$ astfel încât $\begin{cases} t^2 - y^2 + z^2 = 1 \\ y^2 - 2t + z = 0 \end{cases}$. Se obține $x'(1)=1$, $y'(1)=1$, $z'(1)=0$;

$x''(1)=0$, $y''(1)=-\dfrac{2}{3}$, $z''(1)=-\dfrac{2}{3}$. Deci $R(1)=\sqrt{6}$, este raza de curbură în M(1,1,1).

Răspuns. b) $R(0)=\dfrac{a}{\sqrt{2}}$ este raza de curbură în M(0,a,0).

20. Să se demonstreze, că o curbă este o dreaptă dacă și numai dacă curbura în fiecare punct al ei este nulă.

Soluție: „$\Rightarrow$" evident unghiul de contingență $\Delta\alpha=0$, deci $K(t)=0$, $\forall t$. „$\Leftarrow$" Considerăm o parametrizare canonică a curbei respective $\vec r = \vec r(s)$. Din prima formulă a lui Frenet avem $\dfrac{d\vec\tau(s)}{ds} = K(s)\vec\nu(s) = 0$. Cum $\vec\tau(s) = \vec r\,'(s)$ rezultă $\vec r\,''(s) = 0$ și prin integrare obținem $\vec r\,'(s) = \vec c$, $\vec c = (l, m, n)$, este un vector constant. Deci $\vec r(s) = \vec c\, s + \vec c_0$, unde $\vec c_0 = (x_0, y_0, z_0)$ este tot un vector constant. Ultima ecuație este ecuația vectorială a unei drepte. Putem astfel să scriem ecuațiile dreptei și sub forma: $\dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{y - y_0}{m} = \dfrac{z - z_0}{n}$.

21. Fie $\vec r = \vec r(s)$ o curbă parametrizată canonic. Următoarele afirmații sunt echivalente:

a) torsiunea curbei este nulă în orice punct;
b) imaginea curbei se găsește într-un plan (i.e. curba este plană);
c) versorul binormalei este constant.

Soluție: a)$\Rightarrow$b) Cum $T(s)=0, \forall s$, din a treia formulă a lui Frenet avem $\dfrac{d\vec\beta(s)}{ds} = 0$ rezultă $\vec\beta(s) = \vec c$, $\vec c = (A, B, C)$ este un vector constant. Cum $\vec\beta \perp \vec\tau$ și $\vec\tau(s) = \vec r\,'(s)$ rezultă: $Ax'(s)+By'(s)+Cz'(s)=0$. Prin integrare obținem $Ax(s)+By(s)+Cz(s)=-D$. Deci toate punctele curbei se găsesc în planul $Ax+By+Cz+D=0$.
b)$\Rightarrow$a) Dacă imaginea curbei se găsește într-un plan, atunci acest plan va fi planul osculator curbei deci $\vec\beta(s)$, $\forall s$, este un vector constant, rezultă $\vec\beta\,'(s) = 0$. Din a treia formulă a lui Frenet obțin $T(s)=0$, $\forall s$.
a)$\Leftrightarrow$c) Din a treia formulă a lui Frenet $T(s)=0 \Leftrightarrow \vec\beta(s) = \mathrm{constant}$.

22. Să se demonstreze că următoarea curbă $r:\mathbf{R}\to\mathbf{R}^3$, $r(t)=(1+3t+2t^2, 2-2t+5t^2, 1-t^2)$, este o curbă plană și să se găsească ecuația planului în care se află ea.
Soluție: Se calculează torsiunea într-un punct oarecare al curbei și se obține $T(t)=0$, $\forall t\in\mathbf{R}$. Pentru a determina ecuația planului în care se găsește curba, vom scrie ecuația planului osculator într-un punct oarecare al curbei M(t) și vom observa că această ecuație nu depinde de t. Aceasta va fi ecuația planului în care se găsește curba: $2x+3y+19z-27=0$.

23. Să se arate că următoarea curbă $\begin{cases} x = a\sin^2 t \\ y = a\sin 2t \\ z = a\cos^2 t \end{cases}$, este plană și să se scrie ecuația planului în care se află ea.

Răspuns: $x+z=a$.

24. Să se determine curbele plane care au curbura constantă nenulă.
Soluție: Considerăm $\vec r = \vec r(s)$ o parametrizare canonică a curbei căutate. Curba fiind plană rezultă $T(s)=0, \forall s$ și cum din ipoteză $K(s)=c, \forall s$, formulele lui Frenet devin:

$$\begin{cases} \dfrac{d\bar{\tau}(s)}{ds} = c\bar{v}(s) \\ \dfrac{d\bar{v}(s)}{ds} = -c\bar{\tau}(s) \\ \dfrac{d\bar{\beta}(s)}{ds} = 0 \end{cases}.$$

Derivăm prima relație și obținem $\dfrac{d^2\bar{\tau}(s)}{ds^2} = c\dfrac{d\bar{v}(s)}{ds} = -c^2\bar{\tau}^2(s)$ .Rezolvând ecuația diferențială vectorială $\dfrac{d^2\bar{\tau}(s)}{ds^2} + c^2\bar{\tau}^2(s) = 0$, se obține soluția $\bar{\tau}(s) = a\cos(cs)+b\sin(cs)$, unde $a=(a_1,a_2,a_3)$ și $b=(b_1,b_2,b_3)$ sunt vectori constanți. Vom alege axele Ox, Oy, Oz astfel încât pentru s=0, versorii $\bar{\tau},\bar{v},\bar{\beta}$, să devină versorii $\bar{i},\bar{j},\bar{k}$ ai acestor axe. În acest caz obținem $\bar{\tau}(0)=(a_1,a_2,a_3)=(1,0,0)$ rezultă $a_1=1$, $a_2=0$, $a_3=0$. Cum, din a doua formulă a lui Frenet, $\bar{v}(s)=\frac{1}{c}(-ac\sin(cs)+bc\cos(cs))=-a\sin(cs)+b\cos(cs)$, scriind această relație în s=0 ($\bar{v}(0)=(b_1,b_2,b_3)=(0,1,0)$) obținem $b_1=0$, $b_2=1$, $b_3=0$. Deci $\bar{\tau}(s)= (\cos(cs), \sin(cs),0)$, adică $\bar{r}\,'(s)= (\cos(cs),\sin(cs),0)$ .Integrând vom obține

$\bar{r}(s)=(\frac{1}{c}\sin(cs)+c_1,-\frac{1}{c}\cos(cs)+c_2,c_3)$, (c_1,c_2,c_3 constante), adicăă

$\begin{cases} x(s) = \frac{1}{c}\sin(cs)+c_1 \\ y(s) = -\frac{1}{c}\cos(cs)+c_2 \\ z(s) = c_3 \end{cases}$ .Eliminând parametrul s obținem $\begin{cases} (x-c_1)^2 + (y-c_2)^2 = \frac{1}{c^2} \\ z = c_3 \end{cases}$.

Prin urmare curbele plane, cu curbură constantă, nenulă, sunt cercurile.

25. Din fiecare punct M al normalei principale a unei elice circulare ($x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=bt$, $ab\neq 0$) se ia în sens contrar lui $\bar{v}$, pe normala principală un segment MP de lungime constantă, MP=k. Să se determine k astfel încât curba descrisă de punctul P să aibe :

a) aceeași curbură ca și curba dată;

b) aceeași torsiune ca și curba dată. (*T.Lalescu*).

Soluție: Curba descrisă de punctul P, o vom nota cu C_1, și are ecuația:

$\begin{cases} x = (a+k)\cos t \\ y = (a+k)\sin t \\ z = bt \end{cases}$. Curburile celor două curbe sunt:

$K(t)=\dfrac{a}{a^2+b^2}$, pentru elicea circulară, $K_1(t)= \dfrac{a+k}{(a+k)^2+b^2}$, pentru curba C_1.

Torsiunile celor două curbe sunt: $T(t)= \dfrac{b}{a^2+b^2}$, pentru elicea circulară inițială,

$T_1(t)= \dfrac{b}{(a+k)^2+b^2}$, pentru curba C_1.

a) $K(t)=K_1(t)$ rezultă $a(a^2+2ak+k^2)+ab^2=a^3+ab^2+ka^2+kb^2$. Pentru ecuația $ak^2+k(a^2-b^2)=0$, se obțin soluțiile $k_1=0$, $k_2=\dfrac{b^2-a^2}{a}=R(t)-2a$ (R(t) este raza de curbură a elicei circulare inițiale);

b) $T(t)=T_1(t)$ rezultă $(a+k)^2+b^2=a^2+b^2$. Ecuația $k^2+2ak=0$ are soluțiile $k_1=0$, $k_2=-2a$ (aceasta reprezintă elicea egală, trasată pe același cilindru, în sens invers elicei date).

26. Să se arate că , dacă d este distanța de la origine la planul osculator într-un punct M(t), iar ρ(t) este raza de torsiune în M(t), atunci curbele :

a) $\bar{r}(t) = t\bar{i} + t^2\,\bar{j} + \dfrac{1}{t^3}\bar{k}$;

b) $\begin{cases} x = e^{-2t} \\ y = e^t \cos\sqrt{3}\,t \\ z = e^t \sin\sqrt{3}\,t \end{cases}$,

satisfac relația : ρd^2=constant. Curbele care au această proprietate se numesc *curbe Țițeica*.

Răspuns: Ținând cont de formulele pentru ρ(t) și distanța d ,obținem:

$$\rho d^2 = \dfrac{\begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix}^2}{\begin{vmatrix} x' & y' & z'' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}}$$. a)constanta=$-\dfrac{10}{3}$; b)constanta=$-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

27. Să se arate că în orice punct al curbelor :

a) $\begin{cases} x = 2t \\ y = \ln t,\ t>0, \\ z = t^2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t,\ t\in\mathbf{R}, \\ z = e^t \end{cases}$

raportul dintre curbură și torsiune este constant. Aceste curbe se numesc *elice*.

Răspuns: a) $K(t)=\dfrac{2t}{(1+2t^2)^2}$; $T(t)=-\dfrac{2t}{(1+2t^2)^2}$ deci $\dfrac{K(t)}{T(t)}=-1$;

b) $K(t)=\dfrac{\sqrt{2}}{3e^t}$; $T(t)=\dfrac{2}{3e^t}$ deci $\dfrac{K(t)}{T(t)}=\sqrt{2}$.

28. Arătați că tangenta în fiecare punct al unei elice, formează un unghi constant cu o direcție fixă.

Soluție: K=aT , a este o constantă , rezultă $K\bar{v} = aT\bar{v}$ (1)

Prima și a treia formulă a lui Frenet sunt $\begin{cases} \bar{\tau}' = K\bar{v} & (2) \\ \bar{\beta}' = -T\bar{v}. & (3) \end{cases}$

Din (1),(2),(3) obținem $\bar{\tau}'+a\bar{\beta}'=0$. Integrând această relație obținem $\bar{\tau}+a\bar{\beta}=\bar{c}$, unde $\bar{c}$ este un vector constant. Această relație se înmulțește scalar cu vectorul $\bar{v}$ și rezultă

$\langle \bar{v}, \bar{c} \rangle = 0$, adică normala principală face un unghi constant cu o direcţie fixă.
Înmulţind relaţia $\langle \bar{v}, \bar{c} \rangle = 0$ cu K obţinem $\langle \bar{\tau}', \bar{c} \rangle = 0 \Rightarrow \langle \bar{\tau}, \bar{c} \rangle = \cos\alpha \, \|\bar{c}\|$ (o constantă).Deci tangenta face un unghi α constant cu o direcţie fixă $\bar{c}$.

29. Să se determine funcţia derivabilă f(t) astfel încât curba $\begin{cases} x = t^2 \\ y = \frac{1}{3}(t^3 - 3t) \\ z = f(t) \end{cases}$, să fie o elice, ale cărei tangente să facă un unghi de 45^0 cu axa Oz.

Soluţie: $\bar{\tau} = \frac{1}{\sqrt{(t^2+1)^2 + f'^2(t)}}(2t, t^2 - 1, f'(t))$, $\langle \bar{\tau}, \bar{k} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{f'(t)}{(t^2+1)^2 + f'^2(t)} = \frac{1}{2}$.

$\langle \bar{\tau}, \bar{k} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{f'(t)}{(t^2+1)^2 + f'^2(t)} = \frac{1}{2} \Rightarrow f'(t) = t^2 + 1 \Rightarrow f(t) = \frac{t^3}{3} + t + \text{const.}$

30. Să se arate că următoarea curbă $\begin{cases} x = e^t \\ y = e^{-t} \\ z = \sqrt{2}\, t \end{cases}$, este o elice şi să se scrie ecuaţia cilindrului pe care este ea situată.

Soluţie: $\bar{\tau} = \frac{1}{e^t + e^{-t}}\left(e^t \bar{i} - e^{-t}\bar{j} + \sqrt{2}\bar{k}\right)$, $\bar{\beta} = \frac{1}{e^t + e^{-t}}\left(-e^{-t}\bar{i} + e^{-t}\bar{j} + \sqrt{2}\bar{k}\right)$, $K(t) = \frac{\sqrt{2}}{(e^t + e^{-t})^2}$, $T(t) = -\frac{\sqrt{2}}{(e^t + e^{-t})^2} \Rightarrow \frac{K(t)}{T(t)} = -1$ = constant, deci curba este o elice.

Pentru a determina ecuaţia cilindrului notăm cu l,m,n parametrii directori ai generatoarelor cilindrului şi cu $\bar{u}$ versorul pe direcţia generatoarelor. Avem: $\cos\alpha = \langle \bar{\tau}, \bar{u} \rangle = \frac{le^t - me^{-t} + \sqrt{2}\,n}{\left(e^t + e^{-t}\right)\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$, care din exerciţiul 28), trebuie să fie constant. Deci $\frac{le^t - me^{-t} + \sqrt{2}\,n}{\left(e^t + e^{-t}\right)\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$ =ct.$\Rightarrow$ l=-m , n=0.Ţinând cont că l,m,n sunt parametrii directori, pot alege l=1,m=-1,n=0. Ecuaţia unei generatoare oarecare a cilindrului este: $\begin{cases} mx - ly = \lambda \\ nx - zl = \mu \end{cases}$, care în cazul nostru devine: $\begin{cases} x + y = \lambda \\ z = \mu \end{cases}$ (1). Această generatoare se sprijină pe curba $\begin{cases} x = e^t \\ y = e^{-t} \\ z = \sqrt{2}\, t \end{cases}$, care are ecuaţiile implicite $\begin{cases} x = e^{\frac{z}{\sqrt{2}}} \\ y = e^{-\frac{z}{\sqrt{2}}} \end{cases}$ (2). Eliminând λ şi μ din (1) şi (2) se obţine ecuaţia cilindrului $x + y = e^{\frac{z}{\sqrt{2}}} + e^{-\frac{z}{\sqrt{2}}}$.

CAPITOLUL XI

ELEMENTE DE GEOMETRIE DIFERENŢIALĂ A SUPRAFEŢELOR

O suprafaţă (S) poate fi dată prin:

1. *ecuaţia carteziană explicită:*
   $$z = f(x,y), \quad (x,y) \in D \subset \mathbf{R}^2; \tag{1}$$
2. *ecuaţia carteziană implicită:*
   $$F(x,y,z) = 0, \quad x,y,z \in D \subset \mathbf{R}^3; \tag{2}$$
3. *ecuaţii parametrice:*
   $$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v), \\ z = z(u,v) \end{cases} \qquad (u,v) \in \Delta, \quad \Delta \subset \mathbf{R}^2; \tag{3}$$
4. *ecuaţia vectorială:*
   $$\bar{r} = x(u,v)\bar{i} + y(u,v)\bar{j} + z(u,v)\bar{k}. \tag{4}$$

__Planul tangent__ în punctul M de pe suprafaţă are ecuaţia:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_M (x - x_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_M (y - y_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_M (z - z_0) = 0, \tag{5}$$

dacă suprafaţa este dată prin ecuaţia (2), $F \in C^1(D)$ şi cel puţin una dintre derivatele parţiale de ordinul întâi este nenulă, sau:

$$\begin{vmatrix} x - x(u,v) & y - y(u,v) & z - z(u,v) \\ \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)_M & \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)_M & \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)_M \\ \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)_M & \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)_M & \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)_M \end{vmatrix} = 0, \tag{6}$$

dacă suprafaţa este dată prin (3) sau (4), $\bar{r} \in C^1(D)$ şi $\bar{r}_u \times \bar{r}_v \neq \bar{0}$, unde
$$\bar{r}_u = \frac{\partial x}{\partial u}\bar{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\bar{j} + \frac{\partial z}{\partial u}\bar{k}, \ \bar{r}_v = \frac{\partial x}{\partial v}\bar{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\bar{j} + \frac{\partial z}{\partial v}\bar{k}.$$

Dezvoltând determinantul după prima linie obţinem:

$$A[x - x(u,v)] + B[y - y(u,v)] + C[z - z(u,v)] = 0,$$

unde:

$$A=\begin{bmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{bmatrix}, \qquad B=-\begin{bmatrix} x_u & z_u \\ x_v & z_v \end{bmatrix}, \qquad C=\begin{bmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{bmatrix}.$$

Normala în M de suprafaţă va avea ecuaţiile:

$$\frac{x-x(u,v)}{A}=\frac{y-y(u,v)}{B}=\frac{z-z(u,v)}{C}. \qquad (7)$$

Prima formă fundamentală a unei suprafeţe:

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 = \phi_1, \qquad (8)$$

unde:

$$E = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2 = \bar{r}_u^2,$$
$$F = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v = \bar{r}_u \cdot \bar{r}_v,$$
$$G = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2 = \bar{r}_v^2.$$

Unghiul a două curbe de pe suprafaţă:

prin Dcurbilinii

$$\cos\theta = \frac{Edu\delta u + F(du\delta v + dv\delta u) + Gdv\delta v}{\sqrt{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}\sqrt{E\delta u^2 + 2F\delta u\delta v + G\delta v^2}}. \qquad (9)$$

Elementul de arie:

$$dA = \sqrt{EG-F^2}dudv = \sqrt{A^2+B^2+C^2}dudv. \qquad (10)$$

A doua formă fundamentală a unei suprafeţe:

$$\phi_2 = L\,du^2 + 2M\,dudv + N\,dv^2 \qquad (11)$$

unde:

$$L=\frac{D}{\sqrt{EG-F^2}}, \qquad M=\frac{D'}{\sqrt{EG-F^2}}, \qquad N=\frac{D''}{\sqrt{EG-F^2}}, \qquad (12)$$

şi:

$$D=(\bar{r}_u, \bar{r}_v, \bar{r}_{uu}),\ D'=(\bar{r}_u, \bar{r}_v, \bar{r}_{uv}),\ D''=(\bar{r}_u, \bar{r}_v, \bar{r}_{vv}).$$

Curbura normală a unei curbe C de pe suprafaţă notată cu 1/R este:

$$\frac{1}{R}=\frac{\phi_2}{\phi_1}. \qquad (13)$$

Curbe pe suprafaţă:

I. *Linii asimptotice*:

$$L\,du^2 + 2M\,dudv + N\,du^2 = 0,$$

sau împărţind cu du^2:

$$Nv'^2 + 2M\,v' + L = 0. \qquad (14)$$

II. *Liniile geodezice* au ecuaţia diferenţială:

$$\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \\ A & B & C \end{vmatrix} = 0. \qquad (15)$$

III. *Liniile de curbură* au ecuaţia diferenţială:

$$\frac{L+Mv'}{E+Fv'}=\frac{M+Nv'}{F+Gv'} \quad \text{sau} \quad \begin{vmatrix} dv^2 & -dudv & du^2 \\ E & F & G \\ D & D' & D'' \end{vmatrix} = 0. \qquad (16)$$

$\frac{du}{dv} = m$ sau $\begin{vmatrix} \cdot & -\cdot & \cdot \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0$

Curburile principale:

$\frac{1}{R_1}$ şi $\frac{1}{R_2}$ sunt rădăcinile ecuaţiei:

$$(F^2-EG)\frac{1}{R^2}-(2MF-NE-GL)\frac{1}{R}+M^2-LN=0.$$

$$K=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}=\frac{1}{R_1R_2}, \text{ *curbura totală,*} \qquad (17)$$

$$H=\frac{EN+GL-2FM}{2(EG-F^2)}=\frac{1}{2R_1}+\frac{1}{2R_2}, \text{ *curbura medie.*} \qquad (18)$$

§1. INTERSECŢII. CURBE PE SUPRAFAŢĂ

1. Se dă suprafaţa S:

$$x=u+v, \qquad y=u-v, \qquad z=uv, \quad (u,v)\in\mathbf{R}^2.$$

a) Să se afle coordonatele punctelor A(u = 2; v = 1) şi B(u = 1; v = 2);
b) Să se verifice dacă punctele P(4,2,3) şi Q(1,4,-2) aparţin suprafeţei;
c) Să se afle ecuaţia carteziană a suprafeţei.

Răspuns: a) A(3,1,2), B(3,-1,2); b) $P\in S$, $Q\notin S$; c) $z=\frac{1}{4}(x^2-y^2)$.

2. Fie suprafaţa:

$$x=u^2+v, \quad y=u^2-v, \quad z=uv, \quad (u,v)\in\mathbf{R}^2$$

şi dreapta: $\frac{2x-5}{5}=\frac{2y-5}{1}=\frac{2z-1}{3}.$

Să se găsească:
a) Punctele de intersecţie ale dreptei cu suprafaţa;
b. Punctele de intersecţie ale axelor de coordonate cu suprafaţa.

Răspuns: a) A(0,2,-1), B(5,3,2), C(25/12,29/12,1/4), b) (0,0,0).

3. Să se găsească ecuația carteziană a suprafeței:

$$x = u + \sin v, \quad y = u + \cos v, \quad z = u + m, \ (u,v) \in \mathbf{R}^2.$$

Răspuns: $(x - z + m)^2 + (y - z + m)^2 = 1$.

4. Să se arate că suprafețele:

$$(S_1) \qquad \bar{r} = \frac{u\bar{i} + v\bar{j} + \bar{k}}{u^2 + v^2}, \ (u,v) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\},$$

$$(S_2) \qquad \bar{r} = u\cos v\,\bar{i} + u\sin v\,\bar{j} + u^2\bar{k}, \ (u,v) \in \mathbf{R}^2,$$

deşi au aceiaşi ecuație carteziană, ele nu au aceiaşi imagine în $\mathbf{R}^3$.

Răspuns: Ele au aceiaşi ecuație carteziană : $x^2 + y^2 = z$, originea se află pe (S_2) dar

nu se află pe (S_1).

5. Să se formeze ecuația carteziană a suprafeței care are ecuația vectorială:

$$\bar{r} = u^2\bar{i} + uv\bar{j} + (au + v^2)\bar{k}, \ (u,v) \in \mathbf{R}^2.$$

Răspuns: $(xz - y^2)^2 = a^2x^3$.

6. Fie suprafața:

$$x = u^2 + v + 1, \quad y = u^2 - v + 1, \quad z = uv + 2, \ (u,v) \in \mathbf{R}^2$$

şi punctul P (u = 1,v = - 1) pe suprafață. Să se scrie ecuațiile carteziene ale curbelor u = ct. şi v = ct. ce trec prin punctul P.

Răspuns: $\begin{cases} x = z \\ x + y = 4 \end{cases}, \quad \begin{cases} y - x = 2 \\ x = (2 - z)^2 \end{cases}.$

7. Fie paraboloidul hiperbolic

$$2az = x^2 - y^2.$$

a) Să se determine o reprezentare parametrică a suprafeței;

b) Folosind reprezentarea parametrică de la punctul a), să se scrie ecuațiile carteziene ale curbelor $u = \frac{1}{v}$ şi $u = -\frac{1}{v}$ de pe suprafață. Ce curbe sunt acestea?

Răspuns: a) De exemplu

$$x = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{u} + \frac{1}{v}\right), \ y = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{v}\right), \ z = \frac{1}{2auv}, (u,v) \in \mathbf{R}^2, uv \neq 0;$$

b) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ z = \dfrac{1}{2a} \end{cases}, \quad \begin{cases} x^2 - y^2 = -1 \\ z = -\dfrac{1}{2a} \end{cases}$ (hiperbole echilaterale).

8. Se dă suprafața:

$$x = u^2 + v, \quad y = u^2 - v, \quad z = uv, \ (u,v) \in \mathbf{R}^2.$$

a) Să se scrie ecuațiile carteziene ale familiei de curbe u = C_1 şi să se arate că aceste curbe sunt drepte;

b) Să se scrie ecuațiile carteziene ale familiei de curbe v = C_2 şi să se arate că sunt curbe plane;

c) Să se arate că v = u reprezintă o curbă plană.

Răspuns: a) $\begin{cases} x + y = 2C_1^2 \\ C_1x = C_1^3 + z \end{cases}$; b) $\begin{cases} x - y = 2C_2 \\ C_2^2x = z^2 + C_2^3 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x + y = 2z \\ (x - y)^2 = 4z \end{cases}.$

9. Să se arate că curbele u = k de pe suprafața

$$\bar{r} = \left(u^2 + v^2 + uv - 1\right)\bar{i} + \left(uv^2 - 2v + 3\right)\bar{j} + uv\bar{k}, \ (u,v) \in \mathbf{R}^2,$$

sunt curbe plane.

Indicație: Pentru u = k, v = t, parametru pe curbă, torsiunea T = 0.

10. Să se arate că tangenta în punctul $M(u = 1, \ v = \frac{\pi}{2})$ la curba u = sinv de pe suprafața :

$$\bar{r} = (u + \cos v)\bar{i} + (u - \sin v)\bar{j} + \alpha u\bar{k}, \ (u,v) \in \mathbf{R}^2,$$

este şi tangentă în M la curba u = 1.

§2. PLAN TANGENT. NORMALĂ

1. Se dă suprafața:

$$z = 5x^2 + 4y - 3$$

a) Să se găsească o reprezentare parametrică a suprafeței;

b) Să se determine ecuația planului tangent şi ecuațiile normalei la suprafață în punctul A(1,0,2).

Răspuns: a) De exemplu $x = u, \ y = v, \ z = 5u^2 + 4v - 3$;

b) $10x + 4y - z - 8 = 0, \ \dfrac{x-1}{10} = \dfrac{y}{4} = \dfrac{z-2}{-1}.$

2. Să se determine ecuația planului tangent şi ecuațiile normalei în punctul A(0,0,2) la suprafața:

$$x^2 + 2xy + y^2 + 4xz + z^2 + 2x + 4y - 6z + 8 = 0$$

Soluție: Fiind dată suprafața F(x,y,z) = 0, ecuația planului tangent în punctul $P_0(x_0,y_0,z_0)$ este:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{P_0}(x - x_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{P_0}(y - y_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_{P_0}(z - z_0) = 0$$

Normala are ecuațiile:

$$\frac{x - x_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{P_0}} = \frac{y - y_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{P_0}} = \frac{z - z_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_{P_0}}.$$

In cazul nostru avem: $\frac{\partial F}{\partial x} = 2x + 2y + 4z + 2, \ \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_A = 10, \ \frac{\partial F}{\partial y} = 2x + 2y + 4, \ \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_A = 4,$

$\frac{\partial F}{\partial z} = 4x + 2z - 6, \ \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_A = -2$. Planul tangent are ecuația:

$$10x + 4y - 2(z - 2) = 0 \quad \text{sau} \quad 5x + 2y - z + 2 = 0.$$

Ecuațiile normalei vor fi:

$$\frac{x}{5} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{-1}.$$

3. Să se scrie ecuația planului tangent la elipsoidul

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 6 = 0$$

în punctul P(1,1,1) situat pe elipsoid.

Răspuns: $x + 2y + 3z - 6 = 0$.

4. Să se scrie ecuația planului tangent și ecuațiile normalei la cuadrica:

$$4x^2 + 3y^2 - z^2 = 1$$

în punctul P de de intersecție cu axa Ox, ce are abscisa pozitivă.

Răspuns: $P(\frac{1}{2},0,0)$, planul tangent: $2x - 1 = 0$, normala: $\frac{2x-1}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{0}$.

5. Să se scrie ecuația planului tangent și ecuațiile normalei la cuadrica:

$$5x^2 - y^2 - 3z^2 = 1$$

în punctul P(1,1,1)

Răspuns: $5x - y - 3z - 1 = 0$, $\frac{x-1}{5} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{-3}$.

6. Să se determine ecuațiile planelor tangente la hiperboloidul:

$$2x^2 - y^2 - 3z^2 = -1,$$

paralele cu planul $2x - y - 6z - 1 = 0$

Răspuns: $2x - y - 6z = \pm\sqrt{11}$.

7. Să se determine planul tangent la paraboloidul eliptic $3x^2 + y^2 = 2z$ paralel cu planul $3x - y + z - 7 = 0$ și ecuațiile normalei la plan în punctul P(-1,1,2)

Răspuns: $3x - y + z + 2 = 0$, $\frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{1}$.

8. Să se determine planul tangent la paraboloidul hiperbolic

$$x^2 - y^2 = z$$

paralel cu planul

$$2x - y + 3z - 5 = 0$$

și normala în punctul lor de intersecție.

Răspuns: $8x - 4y + 12z + 3 = 0$, $\frac{3x+1}{1} = \frac{6y+1}{-1} = \frac{12z+1}{6}$.

9. Să se determine punctele de pe hiperboloidul cu o pânză:

$$2x^2 + 3y^2 - z^2 = 1$$

în care normalele la suprafață sunt normale ale planului :

$$2x - y - 6z = \sqrt{13}.$$

Răspuns: $\left(-\frac{\sqrt{10}}{10}, -\frac{\sqrt{10}}{5}, \frac{\sqrt{10}}{5}\right), \left(\frac{\sqrt{10}}{10}, \frac{\sqrt{10}}{5}, -\frac{\sqrt{10}}{5}\right)$.

10. Fie suprafața:

$$x = u + v,\ y = u - v,\ z = uv,\ (u,v) \in \mathbf{R}^2.$$

Să se scrie ecuația planului tangent și ecuațiile normalei în punctul A(u = 2, v = 1).

Răspuns: $3x - y - 2z - 4 = 0$, $\frac{x-3}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{-2}$.

11. Fie suprafața:

$$x = 2u - v,\ y = u^2 + v^2,\ z = u^3 - v^3,\ (u,v) \in \mathbf{R}^2$$

și punctul M(3,5,7). Să se scrie ecuația planului tangent în punctul M și ecuațiile normalei în același punct.

Răspuns: $18x + 3y - 4z - 41 = 0$, $\frac{x-3}{18} = \frac{y-5}{3} = \frac{z-7}{-4}$.

12. Să se afle planul tangent, normala și versorul normalei la suprafața

$$\bar{r} = ue^v\bar{i} + ue^{-v}\bar{j} + 4uv\bar{k},\ (u,v) \in \mathbf{R}^2,$$

în punctul M(2,2,0).

Răspuns: $2x - 2y - z = 0$, $\frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z}{-1}$, $\bar{N} = \frac{2}{3}\bar{i} - \frac{2}{3}\bar{j} - \frac{1}{3}\bar{k}$.

13. Se dă suprafața:

$$x = (1 + 5\cos u)\cos v,\ y = (1 + 5\cos u)\sin v,\ z = 5\cos u,\ (u,v) \in (0,\frac{\pi}{2}).$$

Să se scrie ecuația planului tangent în punctul M(u,v) pentru care avem:

$$\cos u = \frac{3}{5}, \qquad \sin v = \frac{4}{5}.$$

Răspuns: $3x + 4y - 5z - 17 = 0$

14. Să se determine punctul suprafeței $x^3 - 3xy - z = 0$ în care normala să fie perpendiculară pe planul $5x + 6y + 2z - 7 = 0$.

Răspuns: $P\left(1, \frac{11}{6}, -\frac{9}{2}\right)$.

15. Se dă suprafața cilindrică:

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0.$$

a) Să se scrie ecuația planului tangent și ecuațiile normalei în punctul P(-1,1,3);

b) Să se arate că planul tangent este perpendicular pe planul xOy.

Răspuns: a) $2x - y + 3 = 0$; $\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-3}{0}$.

16. Să se determine versorul normalei la suprafața:

$$\bar{r} = (u+v)\bar{i} + uv\bar{j} + (u^3 + v^3)\bar{k},\ (u,v) \in \mathbf{R}^2,$$

în punctul A (u = 0, v = 1)

Răspuns: $\bar{N} = \pm\frac{3\bar{i} - 3\bar{j} - \bar{k}}{\sqrt{19}}$.

17. Se consideră suprafața:

$$z = x^3 + y^3$$

a) Să se scrie ecuaţia planului tangent şi ecuaţiile normalei în punctul M(1,2,9);

b) Să se arate că toate planele tangente duse la suprafaţă în punctele A(a,-a,0), $a\in\mathbf{R}$, formează un fascicol de plane.

Răspuns: a) $3x+12y-z-18=0, \frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{12}=\frac{z-9}{-1}$;

b) $3a^2(x+y)=z$. Oricare ar fi valoarea lui a, planele trec prin punctele O(0,0,0) şi P(1,-1,0).

18. Să se determine λ astfel ca suprafaţa $(xz-y^2)^2=\lambda^2x^3$ să treacă prin punctul P(1,2,-1) iar apoi să se determine ecuaţia planului tangent în P.

Răspuns: $\lambda=\pm 5$, $13x-8y+2z+5=0$.

19. Să se determine punctele de pe suprafaţa

$$x=u^2,\quad y=uv,\quad z=v^2+2u,\ (u,v)\in\mathbf{R}^2,$$

în care planele tangente trec prin dreapta de ecuaţii $\frac{x}{2}=\frac{y}{5}=\frac{z-1}{14}$. Să se determine ecuaţiile acestor plane.

Răspuns: $M_1(1,2)$, $M_2(1,3)$, $3x-4y+z-1=0$, $8x-6y+z-1=0$.

20. Să se arate că orice plan tangent la suprafaţa

$$x=u,\qquad y=v,\qquad z=\frac{m}{uv},\ (u,v)\in\mathbf{R}^2,\ uv\neq 0,$$

determină cu planele de coordonate un tetraedru al cărui volum este constant.

Răspuns: $V=\frac{9m}{2}$.

§3. PRIMA ŞI A DOUA FORMĂ FUNDAMENTALĂ A UNEI SUPRAFEŢE

1. Fie suprafaţa

$$\vec{r}=(u^2+v^2)\vec{i}+(u^2-v^2)\vec{j}+uv\vec{k},\ (u,v)\in\mathbf{R}^2.$$

a) Să se scrie prima formă fundamentală;

b) Să se calculeze elementul de arc pentru curbele u = 2, v = 1 şi v = au, $a\in(0,1]$;

c) Să se calculeze lungimea arcului curbei v = au cuprins între intersecţiile acesteia cu curbele u = 1, v = 1;

d) Pe suprafaţă se consideră triunghiul curbiliniu ABC determinat de curbele u = 2, v = 1, u = v. Să se afle lungimea arcului AC şi unghiul A, unde A se află la intersecţia curbelor u = v şi v = 1 iar C la intersecţia curbelor u = 2 şi v = u.

Soluţie: a) Prima formă fundamentală a suprafeţei este:

$$ds^2=E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2,$$

unde: $E=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2=(2u)^2+(2u)^2+(v)^2=8u^2+v^2,$

$$G=\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2=(2v)^2+(-2v)^2+(u)^2=8v^2+u^2,$$

$$F=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)=4uv-4uv+uv=uv.$$

Deci în cazul nostru $ds^2=(8u^2+v^2)du^2+2uv\,du\,dv+(8v^2+u^2)dv^2$.

b) Pentru curba u = 2 , du = 0. Înlocuind în prima formă fundamentală a suprafeţei obţinem:

$$ds^2=(8v^2+4)dv^2\qquad \text{sau}\qquad ds=2\sqrt{2v^2+1}dv.$$

Analog pentru celelalte curbe găsim: $ds=\sqrt{8u^2+1}du$ şi respectiv $ds=2|u|\sqrt{2a^4+a^2+2}du$.

c) Intersecţiile curbei: v = au cu curbele u = 1, v = 1 dau punctele M(u = 1, v = a) şi N(u = 1/a, v = 1). Lungimea arcului curbei este dat de :

$$MN=\int_{u_1}^{u_2}ds=\int_1^{\frac{1}{a}}2\sqrt{2a^4+a^2+2}\,u\,du=2\sqrt{2a^4+a^2+2}\,\frac{u^2}{2}\Big|_1^{1/a}$$

$$=\sqrt{2a^4+a^2+2}\left(\frac{1}{a^2}-1\right).$$

d) Triunghiul curbiliniu ABC are laturile u=2, v=1 şi u=v şi vârfurile A(u=1,v=1), B(u=2,v=1), C(u=2,v=2). Lungimea laturei AC este:

$$AC=\int_{AC}ds.$$

Pe curba AC, du = dv. Inlocuind în ds^2 obţinem:

$$ds^2=9u^2du^2+2u^2du^2+9u^2du^2=20u^2du^2\qquad \text{sau}\qquad ds^2=20v^2dv^2.$$

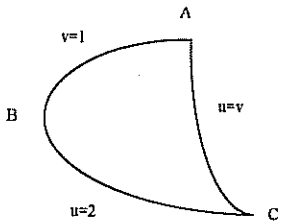


fig. 1

Deci $ds=2\sqrt{5}\,u\,du$. De unde rezultă:

$$AC=\int_1^2 2\sqrt{5}\,u\,du=2\sqrt{5}\,\frac{u^2}{2}\Big|_1^2=3\sqrt{5}.$$

Apoi

$$\cos A=\frac{E\,du\delta u+F(du\delta v+dv\delta u)+G\,dv\delta v}{\sqrt{Edu^2+2Fdudv+Gdv^2}\,\sqrt{E\delta^2u+2F\delta u\delta v+G\delta^2v}}.$$

Pentru curba u = v, du = dv şi pentru curba v = 1, δv = 0. In punctul A(u = 1, v = 1) E = 9, F = 1, G = 9. Rezultă:

$$\cos A = \frac{9du\delta u + du\delta u}{\sqrt{20du^2}\sqrt{9\delta^2 u}} = \frac{10}{6\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

2. Să se găsească elementul de arc al suprafeţei

$$x = u,\quad y = v,\quad z = uv,\ (u,v) \in \mathbf{R}^2.$$

Răspuns: $ds^2 = (1 + v^2)du^2 + 2uv\,du\,dv + (1 + u^2)dv^2$.

3. Să se calculeze lungimea arcului de curbă v = u + 1, între punctele $M_1(1,2)$, $M_2(2,3)$ situat pe suprafaţa

$$\bar{r} = u\cos v\,\bar{i} + u\sin v\,\bar{j} + \frac{2}{3}u\sqrt{u}\,\bar{k},\ (u,v) \in \mathbf{R}^2.$$

Răspuns: $s = \frac{1}{4}(5\sqrt{7} - 3\sqrt{3}) + \frac{3}{8}\ln\frac{5 + 2\sqrt{7}}{3 + 2\sqrt{3}}$.

4. Fie suprafaţa

$$\bar{r} = 2(u+v)\bar{i} + (u^2 + v^2)\bar{j} + \frac{1}{3}(u^3 + v^3)\bar{k},\ (u,v) \in \mathbf{R}^2.$$

Să se afle lungimea arcului curbei u = 1 cuprins între v = 1 şi v = 2 şi unghiul θ dintre curbele u = 2, v = -1.

Răspuns: $L = \frac{13}{3}$, $\theta = \frac{\pi}{2}$.

5. Fie suprafaţa

$$\bar{r} = (u^2 + 3u)\bar{i} + v\bar{j} + u(v+1)\bar{k},\ (u,v) \in \mathbf{R}^2.$$

Să se afle ecuaţia planului tangent la suprafaţă în punctul P(-2,0,-1) şi unghiul dintre curbele de coordonate ce trec prin P.

Răspuns: $x - y - z + 1 = 0$, $\theta = \frac{2\pi}{3}$.

6. Fie pe o suprafaţă

$$ds^2 = du^2 + (u^2 + a^2)\,dv^2,\ \text{unde } a>0,\ (u,v) \in \mathbf{R}^2.$$

Să se afle unghiul θ sub care se taie curbele u + v = 0 şi u - v = 0 şi perimetrul triunghiului curbiliniu determinat de curbele v = 1, $u = 1/2\,av^2$, $u = -1/2\,av^2$ de pe suprafaţă.

Răspuns: $\theta = 2\,\mathrm{arctg}\,a$, $P = \frac{10}{3}a$.

7. Fiind dat elementul de arc al unei suprafeţe

$$ds^2 = du^2 + dv^2,\ \text{unde } (u,v) \in \mathbf{R}^2,$$

să se determine unghiul sub care se intersectează curbele: v = 2u şi v = -2u.

Răspuns: $\theta = \arccos\left(-\frac{3}{5}\right)$.

8. Se dă suprafaţa:

$$\bar{r} = u\cos v\,\bar{i} + u\sin v\,\bar{j} + (u+v)\bar{k},\ (u,v) \in \mathbf{R}^2.$$

Să se determine:
a) Prima formă fundamentală a suprafeţei;
b) Unghiul curbelor u = c, v = k;
c) Planul tangent şi normala la suprafaţă în punctul M(u = 1, v = π).

Răspuns: a) $ds^2 = 2du^2 + 2dudv + (u^2 + 1)dv^2$, b) $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2(c^2 + 1)}}$,

c) $x + y + z - \pi = 0$, $\frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z - 1 - \pi}{1}$.

9. Se dă suprafaţa:

$$x = au + \varphi(v),\quad y = u - a\varphi(v),\quad z = bu,\ (u,v) \in \mathbf{R}^2,$$

(a şi b constante iar $\varphi:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ o funcţie derivabilă). Să se arate că:
a) Suprafaţa este un plan;
b) Curbele v = k sunt drepte paralele;
c) Curbele $u = C_1$, $v = C_2$ sunt ortogonale.

Răspuns: a) $abx + by - (a^2 + 1)z = 0$, b) $\frac{x - \varphi(k)}{a} = \frac{y + a\varphi(k)}{1} = \frac{z}{b}$, c) $\theta = \frac{\pi}{2}$.

10. Fie suprafaţa:

$$x = v\cos u\sin\alpha,\quad y = v\sin u\sin\alpha,\quad z = v\cos\alpha,\ (u,v) \in \mathbf{R}^2,$$

unde $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$ este o constantă (ecuaţia conului de rotaţie cu vârful în origine şi de înclinaţie α faţă de Oz).
a) Să se calculeze elementul de arc şi de arie;
b) Să se calculeze unghiul θ format de curbele: $v = \frac{u^2}{2} + \frac{1}{2}$, $v = \frac{u}{3} + \frac{2}{3}$ în punctul de intersecţie de coordonate curbilinii u = 1, v = 1.

Răspuns a) $ds^2 = v^2\sin^2\alpha du^2 + dv^2$, $d\sigma = v\sin\alpha\,dudv$;

b) $\cos\theta = \frac{3\sin^2\alpha + 1}{\sqrt{(\sin^2\alpha + 1)(9\sin^2\alpha + 1)}}$.

11. Se dă suprafaţa:

$$\bar{r} = u\cos v\,\bar{i} + u\sin v\,\bar{j} + u^2\bar{k},\ (u,v) \in \mathbf{R}^2 \quad \text{sau} \quad x^2 + y^2 = z.$$

a) Să se afle unghiul dintre curbele $u = C_1$, $v = C_2$;
b) Să scrie elementul de arc şi de arie al suprafeţei;
c) Să se afle perimetrul triunghiului curbiliniu determinat de curbele u = 1, u = v, u = -v.

Soluţie. a) Pentru curbele $u = C_1$, $v = C_2$ unghiul dintre ele este dat de:

$$\cos\theta = \frac{F}{\sqrt{EG}},$$

unde:

$$E = (\cos v)^2 + (\sin v)^2 + (2u)^2 = 1 + 4u^2,$$

$$G = (-u\sin v)^2 + (u\cos v)^2 = u^2,$$
$$F = 0.$$

Deci $\cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$.

b) Elementul de arie este: $d\sigma = \sqrt{EG - F^2}\,dudv$. Deci $d\sigma = |u|\cdot\sqrt{1+4u^2}\,dudv$.

Elementul de arc este: $ds^2 = (1+4u^2)du^2 + u^2dv^2$.

c) Fie latura BC pe curba: $u = 1$ (v. fig.2). Atunci $du = 0$ şi $ds^2 = dv^2$. De aici rezultă că

$BC = \int_{-1}^{1} dv = v\Big|_{-1}^{1} = 2$. Analog considerăm AB pe curba $u=-v$. Deci

$$du = -dv \Rightarrow ds^2 = (1+5u^2)du^2,\ ds = \sqrt{1+5u^2}\,du \Rightarrow AB = \int_0^1 \sqrt{1+5u^2}\,du.$$

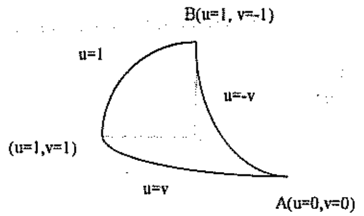


fig. 2

Pentru a calcula integrala facem schimbarea de variabilă $\sqrt{1+5u^2} = t - \sqrt{5}u$. Rezultă:

$$u = \frac{t^2-1}{2\sqrt{5}t}, \qquad du = \frac{t^2+1}{2\sqrt{5}t^2}dt, \qquad \sqrt{1+5u^2} = \frac{t^2+1}{2t}.$$

Atunci

$$AB = \int_1^{\sqrt{6}+\sqrt{5}} \frac{(t^2+1)^2}{4\sqrt{5}t^3}dt = \frac{1}{4\sqrt{5}}\int_1^{\sqrt{6}+\sqrt{5}}\left(t + \frac{2}{t} + \frac{1}{t^3}\right)dt =$$
$$= \frac{1}{8\sqrt{5}}t^2\Big|_1^{\sqrt{6}+\sqrt{5}} + \frac{1}{2\sqrt{5}}\ln t\Big|_1^{\sqrt{6}+\sqrt{5}} - \frac{1}{8\sqrt{5}}\frac{1}{t^2}\Big|_1^{\sqrt{6}+\sqrt{5}} =$$
$$= \frac{10+2\sqrt{30}}{8\sqrt{5}} + \frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left(\sqrt{6}+\sqrt{5}\right) - \frac{1}{8\sqrt{5}}\left(\frac{1}{11+2\sqrt{30}} - 1\right) =$$
$$= \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left(\sqrt{6}+\sqrt{5}\right).$$

Analog $AC = \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left(\sqrt{6}+\sqrt{5}\right)$ şi perimetrul triunghiului curbiliniu este

$P = 2 + \sqrt{6} + \frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left(\sqrt{6}+\sqrt{5}\right)$.

§4. TRAIECTORII ORTOGONALE

1. Fie suprafaţa

$$x = u\cos v,\quad y = u\sin v,\quad z = av,\ (u,v)\in\mathbf{R}^2,\ a>0.$$

a) Să se afle elementul de arc pe suprafaţă;

b) Să se afle unghiurile triunghiului curbiliniu de intersecţie a curbelor $v = 1$, $u = 1/2\,av^2$ $u = -1/2\,av^2$;

c) Să se calculeze elementul de arie;

d) Să se afle traiectoriile ortogonale ale laturilor triunghiului.

Răspuns a) $ds^2 = du^2 + (u^2+a^2)dv^2$; b) $\theta_1 = 0,\ \theta_2 = \arccos\frac{2}{3},\ \theta_3 = \arccos\left(-\frac{2}{3}\right)$;

c) $d\delta = \sqrt{u^2+a^2}\,dudv$, d) La $v = 1$ corespunde $u = C_1$,

la $u = \frac{1}{2}av^2,\ v = e^{\operatorname{arctg}\frac{aC_2-u}{a+C_2u}}$, iar la $u = -\frac{1}{2}av^2,\ v = e^{\operatorname{arctg}\frac{u-aC_2}{a+C_2u}}$.

2. Pe suprafaţa

$$\vec{r} = u\cos v\,\vec{i} + u\sin v\,\vec{j} + (u-v)\vec{k},\ (u,v)\in\mathbf{R}^2,$$

se consideră familia de curbe $v = u + a$ (a parametru). Să se determine curbele ortogonale acestei familii.

Răspuns: $uv = 1 + Cu$.

3. Să se afle traiectoriile ortogonale ale curbelor de coordonate pe suprafaţa

$$x = u^2,\quad y = v^2,\quad z = u + v,\ (u,v)\in\mathbf{R}^2.$$

Răspuns: La $u = k_1$ corespunde $\frac{4v^3}{3} + u + v = C_1$ iar la $v = k_2$, $u + \frac{4u^3}{3} + v = C_2$.

4. Fie suprafaţa

$$x = u\cos v,\quad y = u\sin v,\quad z = av,\quad (u,v)\in\mathbf{R}^2.$$

Să se găsească curbele trasate pe această suprafaţă, care intersectează curbele familiei $v = \ln\left(u + \sqrt{u^2+a^2}\right) + C$ sub un unghi de 90^0.

Răspuns: $v = -\ln\left(u + \sqrt{u^2+a^2}\right) + K$.

§5. LINII ASIMPTOTICE, DE CURBURĂ ŞI GEODEZICE

1. Să se determine liniile asimptotice ale suprafeţei:

$$x = u,\ y = v,\ z = uv^2,\ (u,v)\in\mathbf{R}^2 \text{ sau } z = xy^2.$$

Soluţie: Ecuaţia liniilor asimptotice este:

$$L\,du^2 + 2M\,dudv + N\,dv^2 = 0,$$

unde:

$$L=\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\begin{vmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \\ x_{uu} & y_{uu} & z_{uu} \end{vmatrix},$$

$$M=\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\begin{vmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \\ x_{uv} & y_{uv} & z_{uv} \end{vmatrix},$$

$$N=\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\begin{vmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \\ x_{vv} & y_{vv} & z_{vv} \end{vmatrix}.$$

Rezultă ecuaţia: $4v\,dudv + 2u\,dv^2 = 0$ sau $dv(2v\,du + u\,dv) = 0$. De unde obţinem $dv = 0$, deci $v = C$ şi $2v\,du + u\,dv = 0$. Deci $2v\,du = -u\,dv$ şi $2\frac{du}{u} = -\frac{dv}{v}$. Integrând rezultă $vu^2 = k$.

2. Fie suprafaţa:

$$\bar{r} = u\bar{i} + v\bar{j} + (uv + u)\bar{k},\ (u,v)\in\mathbf{R}^2.$$

Să se determine unghiul format de curbele $u = k$, $v = c$ de pe suprafaţă şi liniile asimptotice ale suprafeţei.

Răspuns: $\cos\theta = \frac{k(c+1)}{\sqrt{(k^2+1)(c^2+2c+2)}}$, $u = ct$, $v = ct$.

3. Să se afle liniile asimptotice ale suprafeţei:

$$\bar{r} = u\bar{i} + (u+v)\bar{j} + (u+v^2)\bar{k},\ (u,v)\in\mathbf{R}^2.$$

Răspuns: $v = c$ (două familii confundate).

4. Să se determine liniile asimptotice ale suprafeţei:

$$\bar{r} = u\bar{i} + uv\bar{j} + v^3\bar{k} \quad (u,v)\in\mathbf{R}^2$$

Răspuns: $v = C_1$, $v = uC_2$.

5. Să se determine liniile asimptotice ale suprafeţei:

$$x = u,\ y = uv,\ z = v + \ln u,\ u>0,\ v\in\mathbf{R}.$$

Răspuns: $u = C_1e^{-2v}$, $u = C_2$.

6. Să se afle liniile asimptotice ale suprafeţei:

$$x = u + v,\ y = u^2 + uv,\ z = uv + 1,\ (u,v)\in\mathbf{R}^2,\ u>0.$$

Răspuns: $u = C_1$, $v = C_2\sqrt{u} - u$.

7. Să se afle liniile asimptotice ale suprafeţelor:

a) $x = u\cos v,\ y = u\sin v,\ z = \frac{1}{u}, (u,v)\in\mathbf{R}^2,\ u\neq 0;$

b) $x = u,\ y = v,\ z = a\left(\frac{u}{v} + \frac{v}{u}\right),\ (u,v)\in\mathbf{R}^2,\ uv\neq 0,\ a\neq 0;$

c) $x = u\cos v,\ y = u\sin v,\ z = \frac{v^3}{3},\ (u,v)\in\mathbf{R}^2.$

Răspuns: a) $u = C_1e^{\frac{v}{\sqrt{2}}}$, $u = C_2e^{-\frac{v}{\sqrt{2}}}$; b) $u = C_1v$, $\frac{1}{u^2} - \frac{1}{v^2} = C_2$;

c) $v = C_1$, $u = C_2v$.

8. Să se determine liniile asimptotice ale suprafeţei:

$$z = y\,\mathrm{tg}x.$$

Răspuns: $x = k$, $Cy = \cos x$.

9. Să se determine liniile asimptotice ale suprafeţei:

$$z = y\sin x.$$

Răspuns: $x = C_1$, $y^2\cos x = C_2$.

10. Să se determine liniile asimptotice ale suprafeţei:

$$z = xy(x^2 - y^2).$$

Răspuns: $xy = k$, $x^2 - y^2 = C$.

11. Să se determine elementul de arie şi liniile asimptotice ale suprafeţei:

$$z = x^2 + y^2.$$

Răspuns: $d\sigma = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}\,dxdy$, $x \pm iy = C$ (liniile asimptotice sunt imaginare).

12. Să se arate că toate punctele suprafeţei:

$$z = \frac{y^2 - x^2}{a},\ a\neq 0,$$

sunt hiperbolice ($LN-M^2 < 0$).

13. Să se afle razele de curbură principale ale suprafeţei:

$$\bar{r} = u\cos v\bar{i} + u\sin v\bar{j} + av\bar{k},\ (u,v)\in\mathbf{R}^2,$$

în punctul $M(u,v)$.

Soluţie: Curburile principale $\frac{1}{R_1}$ şi $\frac{1}{R_2}$ sunt soluţiile ecuaţiei:

$$(F^2 - EG)\frac{1}{R^2} - (2MF - NE - GL)\frac{1}{R} + M^2 - LN = 0$$

unde E,F,G,L,M,N sunt coeficienţii primei şi respectiv celei de a doua forme fundamentale ale unei suprafeţe.

Obţinem:

$$E = 1,\ G = u^2 + a^2,\ F = 0,\ L = 0,\ M = -\frac{a}{\sqrt{a^2+u^2}},\ N = 0.$$

Ecuaţia curburilor principale va fi:

$$-(u^2+a^2)\frac{1}{R^2} + \frac{a^2}{u^2+a^2} = 0,$$

de unde obţinem:

$$R^2 = \frac{(u^2+a^2)^2}{a^2} \quad \text{deci: } R_1 = \frac{u^2+a^2}{a},\ R_2 = -\frac{u^2+a^2}{a}.$$

14. Să se calculeze razele de curbură principale ale suprafeței:

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z,\ pq\neq 0,$$

în punctul O(0,0,0).

Răspuns: $R_1=p$, $R_2=q$.

15. Să se calculeze razele de curbură principale ale suprafeței:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0,\ abc\neq 0,$$

în punctul M(0,0,c).

Răspuns: $R_1=-\frac{a^2}{c}$, $R_2=-\frac{b^2}{c}$.

16. Să se afle liniile de curbură ale suprafeței:

$$x=u,\ \ y=v,\ \ z=uv,\ \ (u,v)\in\mathbf{R}^2.$$

Soluție: Ecuația liniilor de curbură este:

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -dudv & du^2 \\ E & F & G \\ D & D' & D'' \end{vmatrix}=0.$$

In acest caz: $E=1+v^2$, $F=1+u^2$, $G=uv$, $D=0$, $D'=1$, $D''=0$.

Obținem: $\begin{vmatrix} dv^2 & -dudv & du^2 \\ 1+v^2 & uv & 1+u^2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}=0$ sau $(1+v^2)du^2=(1+u^2)dv^2$,

$$\frac{du}{\sqrt{1+u^2}}=\pm\frac{dv}{\sqrt{1+v^2}}.$$

Integrând cele două ecuații obținem liniile de curbură: $v+\sqrt{1+v^2}=C_1\left(u+\sqrt{1+u^2}\right)$

și $\left(v+\sqrt{1+v^2}\right)\left(u+\sqrt{1+u^2}\right)=C_2$.

17. Să se calculeze liniile de curbură ale suprafeței:

$$\begin{cases} x=\frac{a}{2}(u-v) \\ y=\frac{b}{2}(u+v),\ (u,v)\in\mathbf{R}^2. \\ z=\frac{uv}{2} \end{cases}$$

Răspuns: $\dfrac{u+\sqrt{a^2+b^2+u^2}}{v+\sqrt{a^2+b^2+v^2}}=C_1$ și

$$\left(u+\sqrt{a^2+b^2+u^2}\right)\left(v+\sqrt{a^2+b^2+v^2}\right)=C_2.$$

18. Să se determine liniile de curbură ale suprafeței:

$$x=u,\ \ y=v,\ \ z=\ln\cos u+\ln\cos v,\ \ u,v\in[0,\tfrac{\pi}{2}].$$

Răspuns: $\ln tg\left(\frac{u}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=\ln tg\left(\frac{v}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+C_1$, $\ln tg\left(\frac{u}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=-\ln tg\left(\frac{v}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+C_2$.

19. Fie suprafața:

$$\vec{r}=(3u+3uv^2-u^3)\bar{i}+(3v+3u^2v-v^3)\bar{j}+3(u^2-v^2)\vec{k},\ \ (u,v)\in\mathbf{R}^2.$$

Să se calculeze:

a) Coeficienții celor două forme fundamentale ale suprafeței și elementele de arc și de arie;
b) Curbura normală în punctul (u,v);
c) Liniile de curbură ale suprafeței;
d) Liniile asimptotice ale suprafeței;
e) Să se arate că este o suprafață minimală (H = 0).

Răspuns: a) $E=9(1+u^2+v^2)^2$, $F=0$, $G=9(1+u^2+v^2)^2$,

$$L=\frac{6}{\cancel{1+u^2+v^2}},\ M=0,\ N=\frac{-6}{\cancel{1+u^2+v^2}},$$

$$ds^2=9(1+u^2+v^2)^2\left(du^2+dv^2\right),\ d\sigma=9(1+u^2+v^2)^2dudv;$$

b) $\dfrac{1}{R}=\dfrac{6\left(du^2-dv^2\right)}{9(1+u^2+v^2)^3\left(du^2+dv^2\right)}$; c) $u=C_1$, $v=C_2$;

d) $u+v=k_1$, $u-v=k_2$; e) $H=0$.

20. Să se determine ecuația diferențială a liniilor geodezice ale suprafeței

$$z=xy$$

(paraboloid hiperbolic).

Soluție: Ecuația diferențială a liniilor geodezice este:

$$\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \\ A & B & C \end{vmatrix}=0.$$

O reprezentare parametrică a suprafeței este:

$$x=u,\ \ y=v,\ \ z=uv,\ (u,v)\in\mathbf{R}^2.$$

Deci: $A=-v$, $B=-u$, $C=1$,

iar liniile geodezice au ecuația:

$$\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \\ -v & -u & 1 \end{vmatrix}=0.$$

21. Să se determine liniile geodezice ale unui plan.

Indicație: Considerând planul xOy el are ecuațiile parametrice:

$$x=u,\ \ y=v,\ \ z=0,\ (u,v)\in\mathbf{R}^2.$$

Răspuns: $v=C_1u+C_2$ și $u=C_3$. Deci liniile geodezice sunt dreptele din plan.

22. Se dă suprafața:

$$x = u^2 v - v - \frac{v^3}{3},\ y = uv^2 - u - \frac{u^3}{3},\ z = 2uv,\ (u,v)\in R^2.$$

Să se afle:

a) Liniile asimptotice;

b) Liniile de curbură;

c) Curbura medie;

d) Curbura totală.

Răspuns: a) $u = C_1,\ v = C_2$; b) $v = u + C_1,\ v = -u + C_2$, c) $H = 0$ (suprafață minimală); d) $K = -\frac{4}{\left(1+u^2+v^2\right)^2}$

23. Fie elicoidul:

$$\begin{cases} x = u\cos v \\ y = u\sin v, & (u,v)\in R^2 \\ z = v \end{cases}$$

Să se calculeze:

a) Curbura medie;

b) Curbura totală,

c) Liniile asimptotice, liniile de curbură.

Răspuns: a) $H = 0$, b) $K = -\frac{1}{\left(u^2+1\right)^2}$, c) $u = C_1,\ v = C_2$ (liniile asimptotice)

$$\ln\left(u + \sqrt{u^2+1}\right) = \pm v + C \quad \text{(liniile de curbură).}$$

24. Se dă suprafața:

$$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} - a\ln\frac{a + \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}{x^2 + y^2} \quad \text{(pseudosferă), } a>0.$$

a) Să se calculeze curbura medie, curbura totală, razele de curbură principale;

b) Să se găsească liniile asimptotice ale suprafeței.

Indicație: Reprezentarea parametrică a pseudosferei este.

$$x = u\cos v,\ y = u\sin v,\ z = a\ln\frac{a + \sqrt{a^2-u^2}}{u} - \sqrt{a^2-u^2}$$

Răspuns: a) $H = \frac{\sqrt{a^2-u^2}}{2au} - \frac{u}{2a\sqrt{a^2-u^2}},\ K = -\frac{1}{a^2}$,

$$\frac{1}{R_1} = \frac{\sqrt{a^2-u^2}}{au},\ \frac{1}{R_2} = -\frac{u}{a\sqrt{a^2-u^2}},$$

$$\text{b) } v = C_1 + \ln\operatorname{tg}\frac{u}{2},\ v = C_2 - \ln\operatorname{tg}\frac{u}{2}.$$

CAPITOLUL XII

ELEMENTE DE PROGRAMARE LINIARĂ

§1. GENERALITĂȚI

Forme pentru programele liniare. Problema de programare liniară, numită pe scurt *program liniar*, se formulează în R^n astfel:

Să se maximizeze (minimizeze) funcția:

$$(1)\quad f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

cu condițiile:

$$(2)\quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i \qquad i = 1,\dots,k$$

$$(3)\quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \qquad i = k+1,\dots,e$$

$$(4)\quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ge b_i \qquad i = e+1,\dots,m$$

$$(5)\quad x_j \ge 0 \qquad j = 1,2,\dots,n$$

Funcția f(x) se numește *funcția obiectiv* a programului. Relațiile (2) - (4) se numesc *restricțiile programului*, iar inegalitatea (5) poartă numele de *condiții de nenegativitate.*

Programele liniare scrise sub următoarele două forme:

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i \qquad i = 1,2,\dots,m$$
$$x_j \ge 0 \qquad j = 1,2,\dots,n$$

respectiv:

$$\min \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ge b_i \qquad i = 1,2\dots,m$$
$$x_j \ge 0 \qquad j = 1,2,\dots,n$$

se numesc *programe liniare sub forme canonice.*

Un program liniar scris sub forma:

$$\max(\min) \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \qquad i = 1,2,\dots,m$$
$$x_j \geq 0 \qquad j = 1,2,\dots,n$$

se numeşte *program liniar sub forma standard.*

Clasificarea soluţiilor. Un vector $x \in \mathbf{R}^n$ care satisface restricţiile şi condiţiile de negativitate ale programului se numeşte *soluţie admisibilă (posibilă)* sau *program.*

Un vector $x \in \mathbf{R}^n$, cu m componente nenegative (≥ 0) şi cu n - m componente nule, care verifică restricţiile programului se numeşte *soluţie admisibilă de bază (program de bază).* O soluţie admisibilă de bază, care are m componente strict pozitive şi n - m componente nule se numeşte *soluţie admisibilă de bază nedegenerată.* O soluţie admisibilă de bază care are mai puţin de m componente strict pozitive, iar restul componentelor nule, se numeşte *soluţie admisibilă de bază degenerată.*

O soluţie admisibilă de bază pentru care funcţia obiectiv devine optimă (maximă, minimă) se numeşte *soluţie optimă.*

Domeniul (Tronson). Mulţimea punctelor din $\mathbf{R}^n$ care verifică relaţiile (2) - (5) (mulţimea soluţiilor admisibile) formează *domeniul programului liniar* (1) - (5), care se mai numeşte şi *tronson.* Soluţiile admisibile de bază sunt *vârfuri* ale tronsonului.

O funcţie liniară îşi atinge valoarea optimă pe un tronson într-un *vârf*, pe o *muchie*, sau pe o *faţă* (hiperplan) al tronsonului.

§2. METODA SIMPLEX (ALGORITMUL SIMPLEX PRIMAL)

Să considerăm un program liniar pentru maxim sub forma standard:

$$(6) \qquad \begin{aligned} &\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ &\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \qquad i = 1,2,\dots,m \\ &x_j \geq 0 \qquad j = 1,2,\dots,n \qquad (m < n) \end{aligned}$$

şi să definim vectorii:

$$P_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{mj} \end{pmatrix}, \quad j = 1,2,\dots,n; \qquad P_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \end{pmatrix}$$

Atunci restricţiile programului (6) se scriu sub forma:

$$(7) \quad \sum_{j=1}^{n} P_j x_j = P_0 .$$

Să presupunem că se cunoaşte o soluţie admisibilă de bază a programului (6), anume:

$$(8) \quad x_1 > 0, \quad \dots \quad , x_m > 0, x_{m+1} = 0, \quad \dots \quad , x_n = 0 .$$

In acest caz relaţia (7) se mai scrie:

$$(9) \quad P_0 = \sum_{i=1}^{m} x_i P_i ,$$

iar funcţia obiectiv capătă valoarea:

$$(10) \quad z = \sum_{i=1}^{m} c_i x_i .$$

Relaţia (10) ne arată că funcţia obiectiv a programului (6) se poate exprima cu ajutorul soluţiilor admisibile de bază ale sale. Ştiind că optimul programului se atinge într-o astfel de soluţie (respectiv, într-un vârf, pe o muchie, sau pe o faţă a tronsonului său) înseamnă că trebuie să trecem de la soluţia de bază (8), la altă soluţie admisibilă de bază, pentru care valoarea funcţiei obiectiv este mai mare.

Presupunem că $\{P_1, \dots ,P_k, \dots ,P_m\}$ formează o bază. Ei îi corespunde soluţia admisibilă de bază (8). Noua soluţie admisibilă de bază corespunde unei baze $\{P_1, \dots ,P_{k-1},P_l,P_{k+1}, \dots ,P_m\}$ care se obţine din baza precedentă prin înlocuirea vectorului P_k cu un anumit vector P_l ($l>m$).

In raport cu baza $\{P_1, \dots ,P_k, \dots ,P_m\}$ să facem notaţiile:

$$P_j = \begin{pmatrix} x_{1j} \\ x_{2j} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{mj} \end{pmatrix}, \qquad j = m+1,\dots,n ,$$

$$z_j = \sum_{i=1}^{m} x_{ij} c_i, \qquad j = m+1, \ldots, n.$$

Indicii k şi l se aleg în felul următor:

$$z_l - c_l = \min_{m < j \le n} \{z_j - c_j\}; \qquad \frac{x_k}{x_{k_l}} = \min_{x_i > 0, x_{i_l} > 0} \left\{\frac{x_i}{x_{i_l}}\right\}.$$

Noua soluţie admisibilă de bază se determină prin formulele:

$$\boxed{\begin{aligned} & x_i' = x_i - \frac{x_k}{x_{kl}} x_{il}, && i = 1, \ldots, m; \ i \ne k \\ & x_l' = \frac{x_k}{x_{kl}} \end{aligned}}$$

Funcţia obiectiv capătă valoarea:

$$\boxed{x' = z - \frac{x_k}{x_{kl}}(z_l - c_l),}$$

Componentele vectorilor din afara noii baze se calculează după formulele:

$$\boxed{\begin{aligned} & x_{ij}' = x_{ij} - \frac{x_{kj}}{x_{kl}} x_{il}, && i = 1, \ldots, m; \ i \ne k \\ & x_{lj}' = \frac{x_{kj}}{x_{kl}} && j = m+1, \ldots, n; \ j \ne l \end{aligned}}$$

Algoritmul simplex primal (pentru maxim)

a) Se determină o bază iniţială şi se calculează numerele:
x_i, z, $z_j - c_j$, x_{ij}.

b) Criteriul de intrare în bază :

b_1) dacă toţi $z_j - c_j \ge 0$, programul (x_i) este optim.

b_2) dacă există $z_j - c_j < 0$, se determină l din relaţia:

$$z_l - c_l = \min \{z_j - c_j\} \quad (P_l \text{ intră în bază }).$$

c) Criteriul de ieşire din bază :

c_1) dacă toţi $x_{il} \le 0$, problema are optim infinit.

c_2) dacă există $x_{il} > 0$, se determină k din relaţia:

$$\frac{x_k}{x_{kl}} = \min_{x_i > 0, x_{il} > 0} \left\{\frac{x_i}{x_{il}}\right\} \quad (P_k \text{ iese din bază}),$$

d) Pentru noua bază se reia pasul a).

Observaţii:

1). Calculele se fac cu tabele simplex care pentru baza $\{P_1, \ldots, P_k, \ldots, P_m\}$ are forma:

CB	VB	VVB	c_1	...	c_k	...	c_m	c_{m+1}	...	c_l	...	c_n
			x_1	...	x_k	...	x_m	x_{m+1}	...	x_l	...	x_{ln}
c_1	x_1	$\overline{x}$	1	...	0	...	0	$x_{1,m+1}$	...	x_{1l}	...	x_{1n}
.	.	.	.	...	.	...	.	.	...	.	...	.
c_k	x_k	$\overline{x}_k$	0	...	1	...	0	$x_{k,m+1}$	...	x_{kl}	...	x_{kn}
.	.	.	.	...	.	...	.	.	...	.	.	.
c_m	x_m	$\overline{x}_m$	0	...	0	...	1	$x_{m,m+1}$	...	x_{ml}	...	x_{mn}
		z	0	...	0	...	0	$z_{m+1}-c_{m+1}$	...	$z_l - c_l$	...	$z_n - c_n$

2.) Pentru un program liniar de minim se foloseşte acelaşi algoritm simplex, cu deosebirea că P_l se determină prin criteriul $z_l - c_l = \max\{z_j - c_j\}$, sau eventual se ţine seama că

$$\min_{x \in T} f(x) = -\max_{x \in T}(-f(x)), \qquad T \subseteq R^n.$$

1. Să se rezolve programul liniar:

$$\begin{aligned} & \max(3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + 5x_5) \\ & 3x_1 + x_3 - x_5 = 3 \\ & x_1 + x_2 - 3x_4 = -12 \\ & x_2 + x_3 + x_5 = 4 \\ & x_i \ge 0, \ i = 1, \ldots, 5. \end{aligned}$$

Răspuns: Soluţie optimă : $\left(\frac{7}{3}, 0, 0, \frac{43}{9}, 0\right)$, valoarea optimă : $31 + \frac{7}{9}$.

2. Să se rezolve programul liniar:

$$\max(2x_1 - x_2 + 4x_3)$$
$$5x_1 - x_2 - x_3 \geq 1$$
$$3x_1 - 3x_2 + x_3 \leq 3$$
$$6x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

Răspuns: Soluție optimă : $\left(\frac{3}{7}, 0, \frac{8}{7}\right)$, valoarea optimă : $\frac{38}{7}$.

3. Să se afle maximul funcției:

$$f = x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4$$

cu restricțiile:

$$\begin{array}{llr} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 & = 10 & \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \quad + x_5 & = 15, & x_i \geq 0 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 \quad\quad + x_6 & = 20 & \end{array}$$

Indicație: Tabelele simplex care rezolvă problema sunt:

Coef. c_j ai nec. de bază	Nec. x_j de bază	P_0	1	2	3	- 1	0	0	B_i
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	A_i
- 1	$\leftarrow x_4$	10	1	$\boxed{2}$	1	1	0	0	5
0	x_5	15	1	2	3	0	1	0	15/2
0	x_6	20	2	1	5	0	0	1	20
z_j		- 10	-1	-2	-1	-1	0	0	
$\Delta_j = c_j - z_j$			2	4	4	0	0	0	
2	x_2	5	1/2	1	1/2	1/2	0	0	10
0	$\leftarrow x_5$	5	0	0	$\boxed{2}$	-1	1	0	5/2
0	x_6	15	3/2	0	9/2	-1/2	0	1	10/3
z_j		+ 10	1	2	1	1	0	0	
$\Delta_j = c_j - z_j$			0	0	2	-2	0	0	
2	$\leftarrow x_2$	15/4	1/2	1	0	3/4	-1/4	0	5
3	x_3	5/2	0	0	1	-1/2	1/2	0	
0	x_6	15/4	3/2	0	0	$\boxed{7/4}$	-9/4	1	15/7
z_j		15	1	2	3	0	1	0	
$\Delta_j = c_j - z_j$			0	0	0	-1	-1	0	
-1	x_4	10	1	2	1	1	0	0	10
0	x_5	15	1	2	3	0	1	0	5
0	$\leftarrow x_6$	20	2	1	$\boxed{5}$	0	0	1	4
z_j		-10	-1	-2	-1	-1	0	0	
$\Delta_j = c_j - z_j$			2	4	4	0	0	0	
-1	x_4	6	3/5	9/5	0	1	0	-1/5	10/3
0	$\leftarrow x_5$	3	-1/5	$\boxed{7/5}$	0	0	1	-3/5	5/7
3	x_3	4	2/5	1/5	1	0	0	1/5	20
z_j		6	3/5	-6/5	3	-1	0	4/5	
$\Delta_j = c_j - z_j$			2/5	16/5	0	0	0	-4/5	
-1	$\leftarrow x_4$	15/7	$\boxed{6/7}$	0	0	1	-9/7	4/7	5/2
2	x_2	15/7	-1/7	1	0	0	5/7	-3/7	
3	x_3	25/7	3/7	0	1	0	-1/7	2/7	25/3

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
z_j		90/7	1/7	2	3	-1	16/7	-4/7	
$\Delta_j = c_j - z_j$			6/7	0	0	0	-16/7	4/7	
1	x_1	5/2	1	0	0	7/6	-3/2	2/3	
2	x_2	5/2	0	1	0	1/6	1/2	-1/3	
3	x_3	5/2	0	0	1	-1/2	1/2	0	
z_j		15	1	2	3	0	1	0	
$\Delta_j = c_j - z_j$			0	0	0	-1	-1	0	

Răspuns: f max = 15 realizat pentru $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{15}{4}$, $x_3 = \frac{5}{2}$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$, $x_6 = \frac{15}{4}$.

4. Să se afle f_{max} și f_{min} pentru:

$$f = 9x_4 - 14x_5 - 8x_6$$

cu restricțiile:

$$\begin{cases} x_1 \quad + x_4 - x_5 - x_6 = 2 \\ \quad x_2 \quad - 5x_4 + 4x_5 + 7x_6 = 2 \qquad x_i \geq 0. \\ \quad\quad x_3 + 2x_4 + x_5 - x_6 = 5 \end{cases}$$

Răspuns: $f_{max} = 19$ pentru $(0,10,0,3,0,1)$,

$f_{min} = -\frac{244}{13}$ pentru $(37/13, 0, 0, 18/13, 29/13, 0)$.

5. Să se determine maximul funcției:

$$f = x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4$$

în condițiile:

$$\begin{cases} x_1 \quad - x_3 + \frac{1}{2}x_4 = 1 \\ \quad x_2 + x_3 - \quad x_4 = 1 \qquad x_i \geq 0 \end{cases}$$

Răspuns: Funcție nemărginită.

6. Să se determine minimul funcției:

$$f = x_3 - x_4 - x_5$$

în condițiile:

$$\begin{cases} x_1 \quad + x_3 + x_4 - x_5 = 2 \\ \quad x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 1 \qquad x_i \geq 0 \end{cases}$$

Răspuns: Funcție nemărginită .

7. Să se determine minimul funcției:

$$f = x_2 - 3x_3 + 2x_5$$

în condițiile:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_5 = 7 \\ -2x_2 + 4x_3 + x_4 = 12 \\ -4x_2 + 3x_3 + 8x_5 + x_6 = 10 \end{cases} \quad x_i \geq 0 .$$

Răspuns: $f_{min} = -11$ pentru (0,4,5,0,0,11).

8. Să se afle minimul funcției:

$$f = -3x_1 - x_2 + 12x_3 + 2x_4 + x_5$$

cu restricțiile:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_3 + x_5 = 2 \\ x_2 - 7x_3 - x_5 = 1 \\ 10x_3 + x_4 + 2x_5 = 5 \end{cases} \quad x_i \geq 0 .$$

Răspuns: $f_{min} = 1$ pentru (0,3,0,1,2)

9. Să se determine minimul funcției:

$$f = -x_1 + x_2$$

în condițiile:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 - 2x_2 + x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 5 \end{cases} \quad x_i \geq 0 .$$

Răspuns: $f_{min} = -2$ pentru (2,0,0,2,3).

10. Să se determine maximul funcției:

$$f = -3x_1 + 4x_2 - 2x_3$$

cu restricțiile:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 3 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 4 \end{cases} \quad x_i \geq 0$$

Indicație: Deoarece sistemul de restricții nu conține baza unitară vom rezolva problema în două faze.

Faza I. Se determină maximul funcției:

$$g = -\alpha\left(x_4^a + x_5^a\right)$$

cu restricțiile:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4^a = 3 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 + x_5^a = 4 \end{cases} \quad x_i, x_i^a \geq 0$$

unde $\alpha > 0$ și x_4^a, x_5^a sunt variabile artificiale.

Coef. c_j ai nec. de bază	Nec. x_j de bază	P_0	0	0	0	$-\alpha$	$-\alpha$	$B_j/A_{j\beta}$
			P_1	P_2	P_3	P_4^a	P_5^a	A_j
$-\alpha$	$\leftarrow x_4^a$	3	1	$\boxed{3}$	2	1	0	3/3
$-\alpha$	x_5^a	4	3	3	1	0	1	4/3
z_j		-7α	-4α	-6α	-3α	$-\alpha$	$-\alpha$	
$\Delta_j = c_j - z_j$			4α	6α	3α	0	0	
0	x_2	1	1/3	1	2/3	1/3	0	3
$-\alpha$	$\leftarrow x_5^a$	1	$\boxed{2}$	0	-1	-1	1	1/2
z_j		$-\alpha$	-2α	0	α	α	$-\alpha$	
$\Delta_j = c_j - z_j$			2α	0	$-\alpha$	-2α	0	
0	x_2	5/6	0	1	5/6	1/2	-1/6	
0	x_1	1/2	1	0	-1/2	-1/2	1/2	
z_j		0	0	0	0	0	0	
$\Delta_j = c_j - z_j$			0	0	0	$-\alpha$	$-\alpha$	

Faza II. Se determină funcția f cu restricțiile obținute din ultimul tabel simplex al fazei I din care se înlă tură variabilele artificiale.

Coef. c_j ai nec. de bază	Nec. x_j de bază	P_0	-3	4	-2	$B_j/A_{j\beta}$
			P_1	P_2	P_3	
4	x_2	5/6	0	1	5/6	
-3	x_1	1/2	1	0	-1/2	
z_j		11/6	-3	4	29/6	
$\Delta_j = c_j - z_j$			0	0	-41/6	

Răspuns: $f_{min} = 11/6$ pentru (1/2,5/6,0).

11. Să se determine maximul funcției:

$$f = 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4$$

în condițiile:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 3 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 4 \\ 3x_1 + x_2 \qquad + 2x_4 = 8 \end{cases} \qquad x_i \geq 0.$$

Răspuns: Problema este imposibilă.

12. Să se determine maximul funcției:

$$f = 3x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 - x_5$$

în condițiile:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 + x_5 = 11 \\ \quad x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 - 4x_4 - 4x_5 = 10 \end{cases} \qquad x_i \geq 0.$$

Răspuns: $f_{max} = 31$ pentru (9,0,0,2,0)

13. Să se determine minimul funcției:

$$f = -x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4$$

în condițiile:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \qquad = 15 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 \qquad = 20 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 10 \end{cases} \qquad x_i \geq 0.$$

Răspuns: $f_{min} = -15$ pentru (5/2,5/2,5/2,0).

14. Să se determine maximul funcției:

$$f = 3x_1 - 2x_2 + 4x_3$$

în condițiile:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 4 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 5 \end{cases} \qquad x_i \geq 0$$

Răspuns: Funcția nemărginită.

15. Să se determine maximul funcției:

$$f = 3x_1 - 2x_2 + 4x_3$$

în condițiile:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 3 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 4 \end{cases} \qquad x_i \geq 0$$

Răspuns: $f_{max} = 7$ pentru (1,0,1).

16. Să se afle maximul și minimul funcției:

$$f = -3x_1 - 2x_2 - 2x_5$$

în condițiile:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ \quad 2x_2 + 3x_3 \qquad - x_5 = 0 \\ -2x_1 - 2x_2 + x_3 \qquad + 4x_5 = 1 \end{cases} \qquad x_i \geq 0.$$

Răspuns: $f_{max} = -1/4$ pentru (0,1/8,5/4,13/8,0),
$f_{min} = -59/2$ pentru (41/10,21/5,0,0,22/5).

17. Să se afle maximul și minimul funcției:

$$f = x_1 + 2x_3 - x_4$$

cu restricțiile:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \qquad + x_4 + x_5 = 12 \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 4x_4 \qquad = 13 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \qquad = 7 \end{cases} \qquad x_i \geq 0.$$

Răspuns: $f_{max} = 1/2$ pentru (0,0,5/2,9/2,15/2) și (0,45/8,5/8,3/4,0),
$f_{min} = -1$ pentru (3,0,0,4,5).

18. Să se afle maximul și minimul funcției:

$$f = -3x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4$$

în condițiile:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 9 \\ x_1 \quad - x_2 + 2x_3 - x_4 = 6 \end{cases} \qquad x_i \geq 0.$$

Răspuns: $f_{max} = 195/14$ pentru (0,27/14,57/14,3/14),
$f_{min} = 7$ pentru (1,1,3,0).

19. Să se afle maximul funcției:

$$f = x_1 - x_2 - x_3 + x_4$$

cu restricțiile:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 - x_5 \le 6 \\ x_3 + 2x_4 - x_5 + x_6 \ge 2 \\ x_1 + 3x_4 = 1 \end{cases} \qquad x_i \ge 0.$$

Răspuns: $f_{max} = 1$ pentru (1,0,0,0,0,2).

20. Să se rezolve programul liniar:

$$\min(5x_1 - 2x_2 - x_3)$$
$$6x_1 + 2x_2 - 3x_3 \le 6$$
$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 12$$
$$2x_1 - x_2 + 4x_3 \ge 4$$
$$x_i \ge 0, \quad i = 1,2,3.$$

Răspuns: $f_{min} = -52/7$ pentru (0, 20/7, 12/7)

Să se rezolve prin metoda grafică următoarele programe liniare:

21. $\max(-x_1 + 2x_2)$

$$2x_1 + 3x_2 \le 6$$
$$x_1 - x_2 \le 2$$
$$-2x_1 + x_2 \le 2$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$$

Răspuns: $f_{max} = 4$ pentru (0,2).

22. $\max(-x_1 + x_2)$

$$-2x_1 + x_2 \le 2$$
$$x_1 - x_2 \le 2$$
$$x_1 + x_2 \le 5$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$$

Răspuns: $f_{max} = 3$ pentru (1,4).

23. $\min(-x_1 + x_2)$

$$x_1 - 2x_2 \le 2$$
$$x_1 + x_2 \le 5$$
$$2x_1 - x_2 \ge 2$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$$

Răspuns: $f_{min} = 3$ pentru (1,4).

24. $\min(-x_1 + x_2)$

$$-2x_1 + x_2 \le 2$$
$$-x_1 + 2x_2 \ge 8$$
$$x_1 + x_2 \le 5$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$$

Răspuns: Nu are soluții.

BIBLIOGRAFIE

1. Catedra de matematici a I. C. B., *Culegere de probleme de algebră, geometrie analitică, diferențială și programare*, I. C. B. , București, 1984.
2. H. Ikramov, *Recueil de problèmes d'algèbre lineaire*, Edition Mir, Moscou, 1977.
3. I. V. Proskuryakov, *Problems in liniar algebra*, Mir Publishers, Moscow, 1978.
4. C. Udriște și colaboratorii. *Probleme de algebră, geometrie și ecuații diferențiale*, Editura didactică și pedagogică, București, 1981.

Lucrarea *Algebră liniară, geometrie analitică și diferențială* – coord. Groza Ghiocel
a fost avizată pentru multiplicare în ședința
Catedrei Matematică
din 5.11.1996
Tiraj 1000 ex.emplare
Multiplicarea s-a executat în Atelierele U.T.C.B.
Sub comanda nr. 1582/31.07.1997